

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma

Antti Salmela

Nashin tasapaino Hold'em-pokerissa

Diplomi-insinöörin tutkintoa varten tarkastettavaksi jätetty diplomityö
Espoo, 23.11.2015

Työn valvoja: Prof. Harri Ehtamo

Työn ohjaaja: Prof. Harri Ehtamo

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla.
Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

Aalto-yliopisto Perustieteiden korkeakoulu		DIPLOMITYÖN TIIVISTELMÄ	
Tekijä: Antti Salmela			
Työn nimi: Nashin tasapaino Hold'em –pokerissa			
Title in English: Nash Equilibrium in Hold'em Poker			
Tutkinto-ohjelma: Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma			
Pääaine: Systeemi- ja operaatiotutkimus		Sivuaaine: Teknillinen fysiikka	
Opetusyksikön (ent. professuuri) koodi: Mat-2			
Työn valvoja: Prof. Harri Ehtamo		Työn ohjaaja(t): Prof. Harri Ehtamo	
<p>Tiivistelmä:</p> <p>Pokeripelit nostivat suosiotaan 2000-luvun alussa, ja pelaajamäärät ovat edelleen korkeita. Pokeriin liittyvät kaupalliset strategiaoppaat ja myös akateeminen tutkimus ovat yleistyneet huomattavasti, ja pelaajien keskimääräinen taitotaso varsinkin internet-pöydissä on noussut. Strategisesta osaamisesta on tullut aiempaa tärkeämpää voittamistarkoituksessa pokeria harrastaville. Tässä työssä tarkastellaan pokeria peliteorian näkökulmasta ja muodostetaan menetelmä Nashin tasapainon arvioimiseksi joissakin pokeripelin tilanteissa.</p> <p>Nashin tasapaino tarkoittaa kahden pelaajan pokeripelitilanteessa strategiaparia, josta kummankaan pelaajan ei kannata poiketa, mikäli toinen pelaaja pelaa Nashin tasapainon mukaista strategiaa. Työssä kehitetään menetelmä tasapainon arvioimiseksi Texas Hold'em –pokerin tilanteissa, jossa kaikki pelimerkit panostetaan pottiin ensimmäisellä panostuskierroksella. Lisäksi Nashin tasapainon laskemiseksi kehitetään menetelmä viimeiselle ja toiseksi viimeiselle panostuskierrokselle valituissa tilanteissa. Työssä käydään läpi myös Potti-Omaha –pelimuodon tilanne, jossa panostetaan ässät kädessä kaikki pelimerkit pottiin toisella panostuskierroksella.</p> <p>Ensimmäisellä panostuskierroksella Nashin tasapainon arviointiin muodostettu menetelmä perustuu simulaatioihin. Simulaatiopisteiden avulla tarkastellaan pelaajien odotusarvoja ja hahmotellaan kohta, jossa odotusarvojen maksimit leikkaavat toisensa. Viimeisen ja toiseksi viimeisen panostuskierroksen tasapainopisteiden ratkaisemiseen muodostettu menetelmä on analyttinen. Siinä tarkastellaan Nashin tasapainoa peliteorian menetelmillä ja etsitään strategia, jonka pelaamisen jälkeen vastustajalle on samantekevää odotusarvonsa kannalta mitä hän tekee. Potti-Omahaan liittyvä osio perustuu täysin simulaatioihin. Yleisesti ottaen tämä työ osoittaa monilta osin simulaatioiden tehokkuuden pokerissa.</p> <p>Texas Hold'emin ensimmäisen panostuskierroksen tilanteissa saatiin kussakin tarkastellussa tilanteessa tulokseksi käsijoukko, jolla panostus tehdään. Tulokset riippuvat pelimerkkipinin suhteesta pottiin sekä käsijoukosta, joka on mahdollista olla edellisellä panostajalla. Toiseksi viimeisen ja viimeisen panostuskierroksen tilanteissa tulokseksi saatiin, että tasapainoa noudattavassa strategiassa bluffataan todennäköisemmin, kun panostuskoko on suurempi. Lisäksi bluffin todennäköisyys on toiseksi viimeisellä panostuskierroksella suurempi kuin viimeisellä panostuskierroksella.</p>			
Päivämäärä: 23.11.2015		Kieli: Suomi	Sivumäärä: 61
Avainsanat: pokeri, peliteoria, strategia, Nashin tasapaino			

Aalto University School of Science		ABSTRACT OF THE MASTER'S THESIS	
Author: Antti Salmela			
Title: Nash Equilibrium in Hold'em Poker			
Title in Finnish: Nashin tasapaino Hold'em pokerissa			
Degree Programme: Degree Programme in Engineering Physics and Mathematics			
Major subject: Systems and Operations Research		Minor subject: Engineering Physics	
Chair (code): Mat-2			
Supervisor: Prof. Harri Ehtamo		Advisor: Prof. Harri Ehtamo	
<p>Abstract:</p> <p>Poker became more popular than before in the beginning of the 21st century, and the player amounts are still high. Poker related commercial strategy guides and also academic research have become common, and the average skill level of poker players has increased especially in online tables. Strategic understanding has become more important than before for poker players whose intention is to win. In this work poker is examined from the perspective of game theory and a method for estimating Nash Equilibrium is constructed in some situations of poker games.</p> <p>In a two-player poker game Nash equilibrium means a pair of strategies where no player has an incentive to deviate if the opponent plays the equilibrium strategy. In this work a method for estimating Nash equilibrium is constructed in a situation of Texas Hold'em poker where a player bets all his chips into the pot in the first betting round. A method for estimating Nash equilibrium is also constructed in the last and in the second last betting round in specific situations. This work also covers a Pot-Limit Omaha situation in which all the chips are bet into the pot in the second betting round when the player has two aces in his hand.</p> <p>Nash equilibrium estimation in the first betting round is based on simulations. Players' expected values are examined in the simulation points and the point where the maximums of the expected values intersect is estimated. In the cases of last and the second last betting round Nash equilibrium is solved analytically. In these cases Nash equilibrium is examined with the methods of game theory, and a strategy which makes the opponent indifferent between the expected value of his choices is estimated. The section which discusses Pot-Limit Omaha is fully based on simulations. In general this work demonstrates in many parts the power of simulations in poker.</p> <p>The results that were estimated in the situations of the first betting round of Texas Hold'em were hand ranges that the bets were made with. The results depend on how big the stacks are relative to the pot and the hand range that the previous bettor could make the bet with. In the cases of the last and the second last betting round the result was that the bluffing frequency in the equilibrium strategy is higher when the betsize is bigger. Also the bluffing frequency in the second last betting round is higher than in the last betting round.</p>			
Date: 23.11.2015	Language: Finnish	Number of pages: 61	
Keywords: poker, game theory, strategy, Nash Equilibrium			

Alkusanat ja kiitokset

Pelasin ensimmäisen kerran käteispelimuotoista pokeria 2000-luvun alussa Pohjois-Kymen Shakin pelaajien kanssa. Joukkuepikashakin sm-kisojen ensimmäinen pelipäivä oli pelattu, ja hotellihuonejatkoiilla kaivettiin korttipakka ja pelimerkit esiin - ja tietysti myös rahapussit. En tietenkään osannut pelata pätäkääkään, mutta elämäni ensimmäinen pelisessio jäi plussalle puhtaasti hyvän tuurin takia. Hauska yksityiskohta on, että kun muistelen pelin sääntöjä jälkeensä, päädyn siihen mielikuvaan, että pelimuoto jota pelattiin oli Fixed Limit Sökö High Low. Silloin kuvittelin että tämä on ilmeisesti se pokeri, jota kaikissa ringeissä pelataan, mutta milloinkaan jälkeensä en ole kuullutkaan koko variaatiosta. En ole myöskään löytänyt ainuttakaan kyseiseen peliin liittyvää merkintää internetistä. Joka tapauksessa tämä erikoinen POKSilaisten pelaama ”hillo-sökö” jätti positiivisen mielikuvan pokerista ja myös jonkunlaisen ajatuksen siitä, että pelipäätöksillä voi pokerissa vaikuttaa lopputulokseen.

Joitain vuosia myöhemmin alkoikin sitten pokeribuumi, ja pokeri oli kaikkialla. Tuli tv-pokeri, internet-pokeri ja kirjakauppojen harrasteosioiden hyllyt alkoivat pursuta pokeriopusia. Näihin aikoihin aloin harrastaa pokeria vakavammin ja lopulta siitä tuli pääasiallinen toimeentulon lähde. Pokeri oli opiskelun ohessa unelma-ammatti, koska se antoi rajattoman vapauden vuorokausirutiineihin. Toisaalta se toi mukanaan rahallisen varianssin aiheuttamaa stressiä. Pokeriin liittyikin vanha, paradoksaalinen ja hienosti omalla tavallaan paikkansapitävä sanonta: ”*Poker is a hard way to make an easy living*”. On myönnettävä, että pokerin pelaamiseen ja opiskeluun käytin monikymmenkertaisen määrän aikaa verrattuna yliopisto-opintoihin, ja tästä syystä tuntuikin luonteelta yhdistää pokeri tämän lopputyön aiheeseen.

Kiitän professori Harri Ehtamoa, joka hyväksyi Hold'em-pokerin lopputyön aiheeksi sekä ohjasi ja valvoi työn. Aihepiiri vierasperäisine termeineen ei ole helposti lähestyttävä, mikäli peli ei ole ennestään tuttu, mutta toisaalta juuri aihepiirin ulkopuolelta tuleva näkemys on arvokasta asioiden ilmaisun kannalta.

Strategisista keskusteluista haluan kiittää irc-kanava #moka-pokeri:n väkeä. Pelattuja yksittäisiä käsiä on käyty läpi vuosien varrella satoja ellei tuhansia muun muassa Thomas Sandvikin, Jonne Pöyryn ja Henri Niemisen kanssa. Peliteoreettisten näkemysten esilletuomisesta kiitän JP Heimosta ja Markus Kiiliä.

Haluan kiittää myös perhettäni ja erityisesti vanhempiani. Teidän antama kannustus, tuki ja huolenpito on opiskeluvuosina ja tottakai aina sitäkin ennen ollut korvaamatonta, ja olen aina siihen voinut luottaa.

Ja tietenkin kiitän myös rakasta tyttöystävääni Tiiaa. Mikään ei ole yhtä motivoivaa ja parantavaa, kuin halata ihmistä, jonka kanssa voi jakaa mitä tahansa.

Helsingissä, 23.11.2015

Antti Salmela

Sisällysluettelo

1. Johdanto	7
2. Menetelmät	8
2.1. Pokerin säännöt	9
2.1.1. No Limit Hold’emin käteispelin säännöt	10
2.1.1. Potti-Omahan käteispelin säännöt	13
2.1.3. Pokeripelin päämäärä	13
2.2. Arvolyönnit ja bluffit	14
2.2.1. Arvolyönnit ja bluffit all-in-tilanteessa	14
2.2.2. Arvolyönnit ja bluffit yleisemmin	16
2.3. Käsikombinaatioiden laskeminen	17
2.3.1. Kombinaatiot No Limit Hold’emissa	17
2.3.1. Kombinaatiot Potti-Omahassa	18
2.4. Käsivalikoimat	20
2.5. Nashin tasapaino	21
2.5.1. Matriisipelin ratkaiseminen	22
2.5.2. Nashin tasapaino pokerissa	23
2.5.3. Tasapainoa noudattavien strategioiden hyödyt pokerissa	25
2.5.4. Tasapainopisteet löytyvät sekastrategioilla	26
2.5.5. Tasapainokäsivalikoima No Limit Hold’emin all-in –panostuksiin pre-flopissa	27
2.5.6. Tasapainostrategiaa noudattava käsivalikoima riverin all-in -panostuksiin	32
2.5.7. Riveriä edeltävien streettien Nashin tasapaino ja takaperininduktio	36
2.6. Potti-Omahan 4-betatut ässät	39
3. Tulokset	43
3.1. Pre-flop-all-in –tilanteiden tulokset	43
3.1.1. 5-bet-all-in No Limit Hold’emissa kaksinpelitalanteessa	43
3.1.2. 3-bet-all-in No Limit Hold’emissa kaksinpelitalanteessa	46
3.1.3. Yhteen veto No Limit Hold’emin pre-flop-all-in tilanteiden tuloksista	48

4. Pohdintoja	49
4.1. Tilanteet joissa tasapainoa noudattava käsivalikoima ei maksimoi odotusarvoa_	49
4.2. Käytetyn mallin puutteet ja mahdollinen jatkokehittely	50
4.2.1. Gilpinin, Sandholmin ja Sørensenin menetelmä panoskokojen rajoittamiseen	51
5. Yhteenveto	53
Sanastoa	55
Merkintätapoja	58
Lähteet	60

1. Johdanto

Vuonna 2003 alkoi pokeribuumi, joka moninkertaisti pokerin pelaajien lukumäärän maailmassa. Pokerivariaatio Texas Hold'em, jonka juuret juontavat 1920-luvulle Teksasiin, tuli suuren yleisön tietoisuuteen, ja internet-pokerin pelaajamäärät vähintään tuplaantuivat joka vuosi välillä 2003-2006. Pokeribuumin katsotaan alkaneen useiden pienten yhteensattumien summana, joista merkittävimmät olivat TV-pokerilähetysten alkaminen 2003-vuoden keväällä ja historian ensimmäisen amatööripelaajan voittama pokerin maailmanmestaruus saman vuoden kesänä. Kyseinen pelaaja oli Chris Moneymaker, jonka pokerillisesti vaatimattomat lähtökohdat ja hieman huvittavallakin tavalla osuva sukunimi todennäköisesti inspiroivat ja motivoivat pokerin pelaajia harrastuksessaan. Pokeribuumi oli Yhdysvalloissa korkeimmillaan vuosina 2003-2008 ja Euroopassa suunnilleen saman mittaisen ajan parin vuoden viiveellä, mutta pelaajamäärät ovat vielä nykyäänkin selvästi korkeammat kuin buumia edeltäneenä aikana.

Samaan aikaan kun pokeribuumi kasvatti pelaajamääriä, kasvoi myös kysyntä pokerioppaille ja strategiaa opettavalle kirjallisuudelle, joka monikymmenkertastui 2000-luvun alun jälkeen. Viime vuosituhanalla tunnettuja pokerikirjailijoita oli vain muutama; muun muassa Doyle Brunson apujoukkoineen kirjoitti aggressiivista pelitapaa opettavan kokoelmateoksen Super System [1], ja David Sklansky kirjoitti hieman analyyttisempiä teoksia, joista kuuluisin on Theory of Poker [2]. Tämän vuosituhanen puolella kirjoitettuja pokerioppaita on sen sijaan lukemattomia. Suomalaista akateemista tutkimusta No Limit Texas Hold'emista on tehnyt esimerkiksi Mikko Luttinen vuonna 2010 [3], ja aivan etulinjan peliteoreettista tutkimusta Texas Hold'emista ja tietokonepokeriin liittyvästä tekoälystä on tehnyt muun muassa Tuomas Sandholm [4,5]. Viime vuosina esillä olleet kysymykset pokeria käsittelevissä strategia-artikkeleissa ja kirjallisuudessa koskevat niin sanottuja *GTO-strategioita* (Game Theory Optimal), joissa etsitään Nashin tasapainopisteitä kussakin pelitilanteessa.

Tämän työn tarkoitus on käydä läpi pokeristrategian kehittymistä viime vuosituhanen lopulta nykypäivään ja ennen kaikkea tutkia pokerin ajankohtaisia kysymyksiä kuten Nashin tasapainon laskemista kaksinpelissä joissakin valituissa tilanteissa. Nashin tasapaino tarkoittaa lyhyesti sanottuna sitä, että molemmat pelaajat tietävät toistensa pelistrategian ja maksimoivat omaa odotusarvoansa.

Pokerivariaatiot joita tässä työssä tutkitaan, ovat *No Limit Texas Hold'em* (NL Hold'em) ja *Potti-Omaha* (Pot-Limit Omaha). Näissä pelivariaatioissa pelipäätökset voivat haarautua niin monilla eri tavoilla, että kaikkia tilanteita kattavaa GTO-strategiaa ei ole pystytty selvittämään, eikä nykytietokoneiden laskentatehon puitteissa pystytty selvittämään. Joihinkin yksittäisiin tilanteisiin se kuitenkin voidaan ratkaista, ja eräisiin tällaisiin tilanteisiin tässä työssä perehdytään. Tarkoitus on tutkia, millainen panoskoko ja *käsivalikoima* (hand range) täytyy valita kuhunkin tarkasteltavaan tilanteeseen, jotta strategia noudattaisi Nashin tasapainoa. Käsivalikoima tarkoittaa mahdollisten käsien joukkoa, joka pelaajalla arvioidaan olevan kädessään valitsemansa pelisuorituksen jälkeen.

Luvussa 2 käydään läpi pokerin säännöt, yleistä strategiaa viime vuosikymmeniltä, määritellään terminologiaa, selitetään erilaisten käsikombinaatioiden lukumäärien laskeminen ja lopulta

näiden pohjalta muodostetaan laskentatapa Nashin tasapainopisteille valittuihin tilanteisiin. Luvussa 3 selitetään tulokset eli tasapainostrategiaa noudattavat käsivalikoimat eri kokoisille panostuksille ja analysoidaan tuloksia. Lopuksi luvussa 4 pohditaan, millaisissa tilanteissa tasapainokäsivalikoimien pelaaminen ei välttämättä ole hyödyllistä, ja miten saatua mallia voitaisiin mahdollisesti kehitellä lisää kattamaan useampia tilanteita kuin läpikäyty tilanteet.

Pokerikäsitteistö sisältää paljon anglismeja ja vierasperäisiä termejä, joiden merkitys pyritään tässä työssä erikseen selittämään suomeksi aina, kun niitä tulee vastaan. Suurta osaa vierasperäisiä termejä ei kuitenkaan käännetä sanatarkasti, koska niiden käyttö on vakiintunut kieleen pokerin pelaajien keskuudessa, ja sanatarkat käännökset voisivat olla kömpelöitä ja ajoittain myös koomisia. Aki Pyysingin ja Marko Erolan kirjoittama Pokerin käsikirja [6] teki pioneerityötä suomentaessaan joitakin englanninkielisiä käsitteitä vuonna 2005, ja kyseisen teoksen joitakin suomennoksia pyritään käyttämään hyödyksi tässäkin työssä. Työn lopussa sivulla 55 on sanasto, joka pitää sisällään vierasperäisten termien suomenkieliset selitykset aakkosjärjestyksessä, ja joka toivottavasti auttaa lukijaa käsiteviidakossa. Lisäksi sivulle 58 on koottu työssä käytetyt matemaattiset ja pokeriterminologiset merkintätavat.

Tässä työssä ei käsitellä pokeria rahapelaamisen tai uhkapelaamisen näkökulmasta. Siihen liittyviä psykologisia tai taloudellisia lieveilmiöitä ei tarkastella millään tavalla, vaan mielenkiinnon kohteena ovat ainoastaan pelin strategia ja pokeriin liittyvä matematiikka. Tämän työn informaatioisisältö ei myöskään itsessään riitä voitollisen pokerin pelaamiseen, vaikka siitä voi olla jotakin hyötyä kyseisen päämäärän saavuttamisessa.

2. Menetelmät

Tässä luvussa kehitetään menetelmiä, joilla voidaan laskea Nashin tasapaino joissakin No Limit Texas Hold’emin kaksinpelitalanteissa, ja käsitellään myös Potti-Oman strategialla. Näiden menetelmien käyttäminen edellyttää pokerin sääntöjen tuntemista ja pokeriin liittyvän perusmatematiikan ymmärtämistä, joten luvun alkupuolella käydään läpi runsaasti alustavaa materiaalia, jota tullaan myöhemmin käyttämään tasapainostrategioita laskettaessa.

Aluksi selitetään säännöt ja peruskäsitteistö, ja sen jälkeen perehdytään joihinkin välttämättömiin työkaluihin, joita jatkossa tarvitaan. Tällaisia ovat panostusten määrittäminen arvolyönneiksi ja bluffeiksi sekä käsikombinaatioiden laskeminen. Näitä käsitteitä ja menetelmiä käytetään *käsivalikoimia* (hand range) muodostettaessa myöhemmin tässä luvussa. Käsivalikoima tarkoittaa sellaista käsijoukkoa, johon pelaajan käsi päätellään sisältyvän jonkin hänen tekemänsä pelisuorituksen jälkeen.

Peruskäsitteistön ja muiden tarpeellisten määritelmien jälkeen muodostetaan käsivalikoimien perusteella Nashin tasapainoa noudattavia strategioita joissakin tyypillisissä No Limit Texas Hold’emin ja Potti-Oman tilanteissa.

2.1. Pokerin säännöt

Tässä työssä tarkasteltavia pokeripelejä pelataan yhdellä korttipakalla, johon sisältyy 52 korttia. Kukin kortti edustaa jotakin maata, joita on neljä kappaletta: hertta (♥), pata (♠), risti (♣) ja ruutu (♦). Kussakin maassa on 13 eriarvoista korttia, ja korttien arvojärjestys suurimmasta pienimpään on A-K-Q-J-T-9-8-7-6-5-4-3-2, missä A tarkoittaa ässää, K tarkoittaa kuningasta, Q tarkoittaa akkaa, J tarkoittaa jätäkää ja T tarkoittaa numeroa 10. A voi tarkoittaa myös pieniarvoisinta korttia eli numeroa 1, mikäli sen johdosta pelaaja saa paremman käden kuin ässän tarkoittaessa suuriarvoisinta korttia.

Suurimmalle osalle suomalaisista, jotka eivät ole pokeriharrastajia, tutuin pokerivariaatio on Raha-automaattiyhdistyksen kolikkoautomaattien pokeripeli, jossa käteen jaetaan viisi korttia. Haluamansa määrän kädessä olevia kortteja voi vaihtaa yhden kerran pakasta otettaviin kortteihin, ja sen jälkeen korteista muodostetaan viiden kortin pokerikäsi. Tämä pokerivariaatio muistuttaa lähiten peliä, jonka nimi on *viiden kortin ostopokeri* (five-card-draw). Tässä työssä ei keskitytä viiden kortin ostopokeriin, mutta sen tuntemisesta voi olla hyötyä perehdyttäessä pokerin sääntöihin yleisemmin. Käsien arvojärjestys, joka voi olla tuttu kolikkoautomaattien viiden kortin ostopokerista, on nimittäin sama kaikissa pokerivariaatioissa, ja se on näkyvillä taulukossa 1.

Taulukossa 1 on pokerikäsien arvojärjestys parhaimmasta huonoimpaan ylhäältä alas. Esimerkiksi pelaaja, jonka käsi on suora, voittaa pelaajan jolla on kädessään pari, mutta häviää pelaajalle, jolla on kädessään neloset. Pokerikäsi sisältää aina 5 korttia ja pokerikäsien arvojärjestys on kaikissa pelimuodoissa sama, mutta eri pelimuodoissa vaihtelevat esimerkiksi piilossa olevien ja näkyvien korttien lukumäärä, panostuskierrosten lukumäärä ja kullekin pelaajalle itselleen ja kaikille pelaajille yhteiseksi jaettujen korttien lukumäärä. Seuraavaksi käydään läpi kahden tietyn pelimuodon säännöt: *No Limit Texas Hold'emin* (NL Hold'emin) säännöt ja *Potti-Omanhan* (Pot-Limit Omaha eli PLO) säännöt.

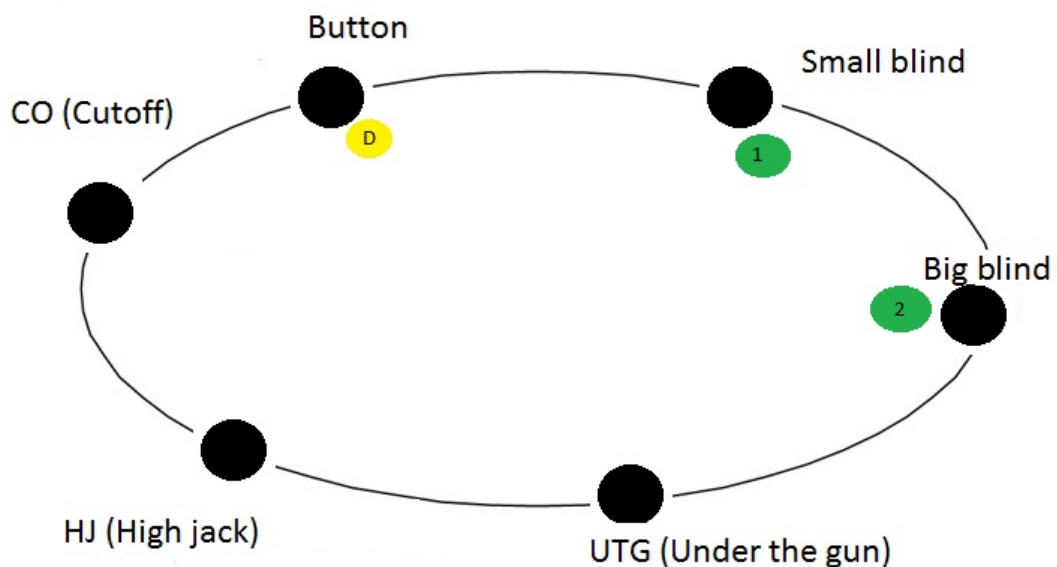
Taulukko 1. Pokerikäsien arvojärjestys parhaimmasta huonoimpaan ylhäältä alas.

Käsi	Esimerkki	Määritelmä
Värisuora	J♥T♥9♥8♥7♥	5 arvojärjestyksessään peräkkäistä korttia samaa maata
Neloset	5♣5♦5♥5♠A♠	4 samanarvoista korttia
Täyskäsi	3♦3♠5♥5♣5♦	Kolmoset ja pari
Väri	7♥2♥9♥K♥5♥	5 korttia samaa maata
Suora	5♥6♣7♥8♣9♠	5 arvojärjestyksessään peräkkäistä korttia
Kolmoset	6♠6♦T♠Q♠6♣	3 samanarvoista korttia
Kaksi paria	7♣7♥8♣8♥A♣	2 seuraavalla rivillä määriteltyä paria
Pari	8♣8♥T♥Q♥J♥	2 samanarvoista korttia
Korkea kortti	K♥T♣7♥5♣6♥	Käden suuriarvoisin kortti

2.1.1. No Limit Texas Hold’emin käteispelin säännöt

NL Hold’emissa kullekin pelaajalle jaetaan 2 korttia, ja yhden pelaajan eteen asetetaan jakajanappi eli button. Pelaajat eivät näe muiden pelaajien kortteja, vaan kukin näkee ainoastaan itsellensä jaetut kortit. Button siirtyy kussakin jaossa seuraavalle pelaajalle ja kiertää pöydässä myötäpäivään. Pelaaja, joka saa buttonin pelin ensimmäisessä jaossa, ratkaistaan arpomalla. Ennen kutakin jakoa buttonista myötäpäivään seuraava pelaaja asettaa *pienen sokkopianoksen* (small blind eli sb) ja pienestä sokkopianoksesta seuraava pelaaja asettaa *suuren sokkopianoksen* (big blind eli bb), joka on kaksi kertaa yhtä suuri kuin sb. Sokkopianosten suuruus määrittää pelin panostason ja maksimisisäänoston, joka on useimmissa pokeripöydissä 100bb. Kun puhutaan pelaajasta, joka istuu suuren sokkopianoksen kohdalla, käytetään jatkossa isoilla kirjaimilla kirjoitettua merkintätapaa BB erotuksena pienellä kirjoitettuun, joka tarkoittaa pottiin sijoitettua sokkopianosta. Sama merkintätapa pätee pienen sokkopianoksen asettaneeseen pelaajaan jota kutsutaan jatkossa SB:ksi. Minimisisäänosto on useimmiten 25bb:n ja 50bb:n välillä, ja yhden bb:n suuruus vastaa aina jotakin ennalta sovittua rahallista arvoa. Kaikki pelaajat näkevät kaiken aikaa kuinka paljon muilla pelaajilla on pelimerkkejä. Yhdessä jaossa on 4 panostuskierrosta, jotka ovat pre-flop, floppi, turn ja river. Pelin kulku kullakin panostuskierroksella on selitetty alla.

- **Pre-flop:** Suuresta blindista myötäpäivään seuraava pelaaja on ensimmäisenä vuorossa. Tässä *positiossa* istuvaa pelaajaa kutsutaan jatkossa nimellä UTG kuvan 1 mukaisesti. Positiot tarkoittavat pelaajien istumajärjestystä, kuten kuvasta 1 käy ilmi. UTG voi joko *maksaa* (call), *korottaa* (raise) tai *kipata* (fold). Maksaminen tarkoittaa, että pelaaja asettaa edellisen korotuksen verran rahaa pottiin. UTG:n tapauksessa aiempia korotuksia ei ole tullut, ja tällaisissa tilanteissa maksaminen pre-flopissa tarkoittaa aina 1bb:n asettamista pottiin. Korottaminen tarkoittaa, että pelaaja asettaa pottiin maksuun vaadittavan määrän pelimerkkejä ja lisäksi valitsemansa määrän, jolla haluaa korottaa.



Kuva 1. Lyhenteet eri pelaajien *positioille* kuuden hengen pöydässä, eli sille missä suhteessa he istuvat sokkopianoksiin ja toisiinsa nähden [7].

Kippaaminen tarkoittaa, että pelaaja heittää korttinsa pois eikä aseta lainkaan pelimerkkejä pottiin, ja jako päättyy kippaavan pelaajan osalta. Vuoro siirtyy myötäpäivään ja kukin pelaaja voi vuorollaan joko maksaa, korottaa tai kipata. Mikäli pelaaja korottaa pre-flopissa eikä kukaan muu ole korottanut aiemmin, on minimikorotuksen määrä 1bb eli pelaajan on *panostettava* yhteensä 2bb:n verran. Panostus tarkoittaa yhteenlaskettua pelimerkkimäärää, jonka pelaaja laittaa pottiin korottaessaan. NL Hold'emissa panostuksella ei ole muuta ylärajaa kuin merkkipinon suuruus. Mikäli aikaisemmin on korotettu, ja pelaaja *uudelleenkorottaa* (re-raise) eli korottaa lisää, on minimikorotuksen määrä kaksi kertaa aikaisemman korotuksen suuruus. Ensimmäistä uudelleenkorotusta pre-flopissa kutsutaan jatkossa *3-betiksi*, sitä seuraavaa uudelleenkorotusta *4-betiksi* ja sitä seuraavaa uudelleenkorotusta *5-betiksi*. Panostuskierros aukeaa uudelleen kaikille aikaisemmin vuorossa olleille pelaajille, mikäli joku pelaaja päättää korottaa tai uudelleenkorottaa. Jos esimerkiksi UTG on korottanut, HJ ja CO (kuva 1) kipanheet, button uudelleenkorottanut ja small blind ja big blind kipanheet, vuoro siirtyy uudelleen UTG:lle, joka voi jälleen joko maksaa, korottaa tai kipata. Panostuskierros päättyy, kun mukana olevat pelaajat vain maksavat korotuksen eivätkä uudelleenkorota, ja tämän jälkeen siirrytään seuraavalle panostuskierrokselle eli turnille. Tässä vaiheessa panostuskierroksella tehdyt panostukset siirretään erilliseen pottiin, eivätkä potissa olevat pelimerkit enää vaikuta seuraavilla panostuskierroksilla vaadittaviin maksuihin. Mikäli millä tahansa panostuskierroksella kaikki pelaajat kippaavat korotukseen, voittaa korotuksen tehnyt pelaaja jaon suoraan ja potissa olevat pelimerkit.

- **Floppi:** Tämän panostuskierroksen alussa pöytään jaetaan pakasta kolme korttia. Pöydässä olevia kortteja kutsutaan jatkossa *boardiksi*. Flopilla pöytään jaettuja kolmea korttia kutsutaan yleisesti myös samalla nimellä kuin itse panostuskierrosta eli flopiksi. Flopilla ensimmäisenä on vuorossa buttonista seuraava pelaaja myötäpäivään, eli pelaaja joka on pre-flopissa asettanut SB:n. Panostuskierros etenee samalla tavalla kuin pre-flopissa, eli jokainen jaossa mukana oleva pelaaja voi joko korottaa, maksaa tai kipata. Mikäli kukaan pelaaja ei ole panostanut, voi vuorossa oleva pelaaja *sököttää* (check), jolloin pelimerkkejä ei laiteta pottiin, ja vuoro siirtyy seuraavalle pelaajalle. Sököttämisen mahdollisuutta ei ollut pre-flopissa, koska kyseisellä panostuskierroksella mukana jatkamiseen vaadittiin vähintään suuren sokkopanoksen maksaminen. Flopilla jälleen panostuskierros päättyy mikäli kaikki tehdyt korotukset on maksettu, kaikki pelaajat ovat sököttäneet tai mikäli kaikki pelaajat ovat kipanheet panostukseen, jolloin koko jako päättyy.
- **Turn:** Turnilla boardiin jaetaan pakasta neljäs kortti, ja muilta osin panostuskierros etenee samalla tavalla kuin flopilla.
- **River:** Tämä panostuskierros on viimeinen. Boardiin jaetaan viides kortti, jonka jälkeen panostuskierros etenee samalla tavalla kuin flopilla ja turnilla. Mikäli tällä panostuskierroksella viimeisenä tehty korotus tulee maksetuksi tai kaikki pelaajat sököttävät, siirrytään *showdowniin*. Showdown tarkoittaa, että pelaajat muodostavat

boardin viidestä kortista ja kädessään olevasta kahdesta kortista viiden kortin pokerikäden. Käytössä olevista seitsemästä kortista valitaan ne viisi korttia, jotka muodostavat taulukon 1 mukaisen parhaan mahdollisen pokerikäden. Mikäli jako menee showdowniin, voittaa potin se pelaaja, jolla on paras käsi. Jos kahdella tai useammalla pelaajalla on sama paras käsi, jaetaan potti tasan kyseisten pelaajien kesken.

Kun jako on päättynyt, button ja sokkohanokset siirtyvät pöydässä yhden paikan eteenpäin myötäpäivään. Jokaisen jaon päätyttyä ennen seuraavan jaon alkamista kuka tahansa pelaaja voi ostaa lisää pelimerkkejä, mikäli hänen pelimerkkimääränsä on pienempi kuin pöydän maksimisisäänosto. Jakojen välillä kuka tahansa pelaaja voi myös lopettaa pelaamisen, ja pöytään voi tulla uusia pelaajia, mikäli siinä on vapaita paikkoja.

Kunkin pelaajan aloituskädessä on kaksi korttia, ja aloituskädet merkitään jatkossa kirjoittamalla kummankin kortin arvo ja maa peräjälkeen. Esimerkiksi aloituskädestä jossa on herttaässä ja ruutukymppi, käytetään merkintää A♥T♣. Mikäli korteista on kirjoitettu ainoastaan arvot (esim. AT), käden kortit voivat olla mitä maata tahansa.

NL Hold'em säännöt ovat intuitiiviset ja ne oppii paperilta lukemista helpommin pelaamalla itse tai katsomalla, kun muut pelaavat. Säännöt löytyvät myös lukuisilta internet-sivustoilta, kuten esimerkiksi lähteistä [8] ja [9]. Ensin mainittu lähde on yksityiskohtaisempi kuin jälkimmäinen, mutta jälkimmäinen lähde on suomenkielinen. Esimerkki 2.1. havainnollistaa pelin kulkua yhden esimerkkijaon verran.

Esimerkki 2.1.

Pelataan käteispöydässä jossa pienen blindin suuruus on 1e ja suuren blindin 2e.

Pre-flop: UTG kippaa ja pelaaja paikalla HJ panostaa 6 euroa kädellä K♥J♣. CO, button ja small blind kippaavat, ja big blindilla oleva pelaaja maksaa panostuksen kädessään 5♥6♥. Potissa on nyt 13e (6e+6e+1e) ja se laitetaan erilliseen pinnoon. Tätä määrää ei enää huomioida seuraaviin korotuksiin vaadittavissa maksuissa.

Floppi: Pöytään jaetaan boardi J♥4♥2♣. BB sököttää, ja HJ panostaa 7e. BB panostaa 21 euroa eli tekee uudelleenkorotuksen, ja HJ maksaa vaadittavan erotuksen eli 14e. Panostukset ja maksut, jotka panostuskierroksella tehtiin, siirretään pottiin jossa on nyt yhteensä 55e (aiemmat 13e pre-flopissa ja nyt pottiin menneet 21e kummaltakin pelaajalta).

Turn: Pöytään jaetaan neljäs kortti J♠, jolloin boardi on J♥4♥2♣J♠. BB panostaa 28e, jonka HJ maksaa. Potissa on nyt 111e.

River: Pöytään jaetaan viides kortti 7♥, jolloin boardi on J♥4♥2♣J♠7♥. BB panostaa 55e, jonka HJ maksaa. Siirrytään showdowniin, jossa molemmat pelaajat paljastavat kätensä. BB:n käsi on J♥4♥7♥5♥6♥ eli väri, ja HJ:n käsi on K♥J♣J♥J♠7♥ eli kolmoset. Koska väri voittaa kolmoset, BB voittaa potin, johon kertyi panostuskierrosten aikana 221e.

2.1.2. Potti-Omahan käteispelin säännöt

Pelin kulku PLO:ssa on muilta osin täysin samanlainen kuin NL Hold'emissa lukuunottamatta kolmea asiaa:

- PLO:ssa kunkin pelaajan käteen jaetaan kahden kortin sijaan neljä korttia.
- Lopullista viiden kortin pokerikättä muodostettaessa pelaajan on pakko käyttää kaksi korttia kädestään ja kolme korttia boardista. Tämä eroaa NL Hold'emista siten, että NL Hold'emissa kädessä olevista korteista käytetään yhtä, kahta tai nollaa korttia siitä riippuen, millä tavoin saadaan muodostettua paras mahdollinen käsi.
- Maksimikorotus kullakin panostuskierroksella on potin suuruinen.

Potti-Omahassa aloituskädet merkitään kirjoittamalla kunkin neljän kortin arvo peräjälkeen. Jos kädessä on kuningas, jätkä, kymppi ja kahdeksikko, merkitään että käsi on KJT8. Mikäli joitain kortteja ei ole erikseen määritetty, kirjoitetaan kyseisten korttien tilalle merkintä x. Tämä tarkoittaa, että x:n kohdalla voi olla mikä tahansa mahdollinen kortti. Esimerkiksi AAxx tarkoittaa ässäparia, jonka kanssa voi olla kolmantena ja neljäntenä korttina mitkä tahansa kortit.

2.1.3. Pokeripelin päämäärä

Pokerissa kukin rationaalinen pelaaja maksimoi yllä esitettyjen sääntöjen puitteissa omaa rahallista odotusarvoaan. Odotusarvon maksimoiminen tarkoittaa eri asioita turnauspokerissa ja käteislepeissä, ja seuraavaksi selitetään lyhyesti turnauspokerin ja käteispelin ero.

Turnauspokerissa pelaajat maksavat ennaltamäärätyn turnaukseen vaadittavan sisäänoston, ja palkinnot jaetaan sen perusteella, kuinka pitkälle pelaaja selviytyy putoamatta turnauksesta. Pelaaja putoaa turnauksesta, kun hän on hävinnyt kaikki pelimerkkinsä, ja tästä syystä turnauspelaajalle viimeiset pelimerkit ovat kaikkein arvoikkaimmat pelimerkit rahallisen odotusarvon näkökulmasta. Turnauspelaajan riskiasenne on riskipakoinen.

Käteispelissä pelimerkit sen sijaan tarkoittavat rahaa itsessään. Käteinen vain on muunnettu pelin ajaksi pelimerkeiksi, joita on helpompaa liikutella pelipöydässä edestakaisin. Käteispelissä pelimerkkejä voidaan aina tarpeen tullen ostaa lisää, ja pelimerkit voidaan myös koska tahansa vaihtaa rahaksi, mikäli pelaaja haluaa omalta osaltaan lopettaa pelaamisen. Käteispelissä jokaisella pelimerkillä on yhtä suuri rahallinen odotusarvo.

Tässä työssä tarkastellaan pokeria käteispelistrategioiden näkökulmasta. Kaikki strateginen tarkastelu ja muun muassa Nashin tasapainopisteiden laskeminen tehdään sillä oletuksella, että rationaaliset pelaajat maksimoivat riskineutraalilla asenteella oman pelimerkipinonsa suuruutta, eivätkä mitenkään korostetusti yritä vältellä riskejä tai pelimerkkimääränsä menemistä nolleen, kuten turnauspokerissa tehtäisiin.

2.2. Arvolyönnit ja bluffit

Pokerissa kaikki panostukset ovat joko *arvolyöntejä* tai *bluffeja*. Mikäli panostajan odotusarvo on suurempi vastustajan kipatessa kuin tämän maksaessa, on panostus bluffi. Jos taas panostajan odotusarvo on suurempi vastustajan maksaessa kuin kipatessa, on panostus arvolyönti. Panostuksen tarkoitus on aina lisätä panostajan odotusarvoa ja saada vastustaja tekemään odotusarvoinen virhe. Seuraavaksi tarkastellaan matemaattisin määritelmien sitä, miten bluffit voidaan erotella arvolyönneistä yksinkertaisessa *all-in* -tilanteessa. *All-in* tarkoittaa tilannetta, jossa kaikki pelaajan pelimerkit menevät pottiin. *All-in -panostus* tarkoittaa panostusta, jossa pelaaja panostaa kaikki pelimerkinsä pottiin.

2.2.1. Arvolyönnit ja bluffit all-in -tilanteessa

Jotta arvolyönnit voidaan erottaa bluffeista, on aluksi määriteltävä all-in-panostuksen tekevälle pelaajalle odotusarvo. Merkitään, että panostavan pelaajan odotusarvo on EV_a , kun $a \in A$ on toimenpide, jonka vastustaja tekee all-in -panostuksen jälkeen, ja A on mahdollisten toimenpiteiden joukko. Vastustaja voi all-in -panostuksen jälkeen joko kipata tai maksaa, jolloin mahdollisten toimenpiteiden joukko on $A = \{\text{kippi, maksu}\}$. Kunkin pelaajan *equity* tarkoittaa pelaajan odotusarvoista prosentuaalista voitto-osuutta potista tilanteessa, jossa tehdään all-in -panostus, joka maksetaan. Equity on käytännöllinen suure, koska se riippuu ainoastaan siitä, mikä käsi pelaajalla itsellään on ja mikä käsi vastustajalla on. Equityt ratkaistaan käytännössä simulaatioiden avulla.

Olkoon potissa määrä P ja pelissä kaksi pelaajaa. Molemmilla pelaajilla on pelimerkkejä samansuuruisen määrän M verran. Toinen pelaajista päättää panostaa all-in eli tehdä M :n suuruisen lyönnin. Panostajan equity maksun tullessa on x . Tällöin hänen odotusarvonsa maksun tullessa on

$$EV_{\text{maksu}} \triangleq x(P + M) - (1 - x)M, \quad (1)$$

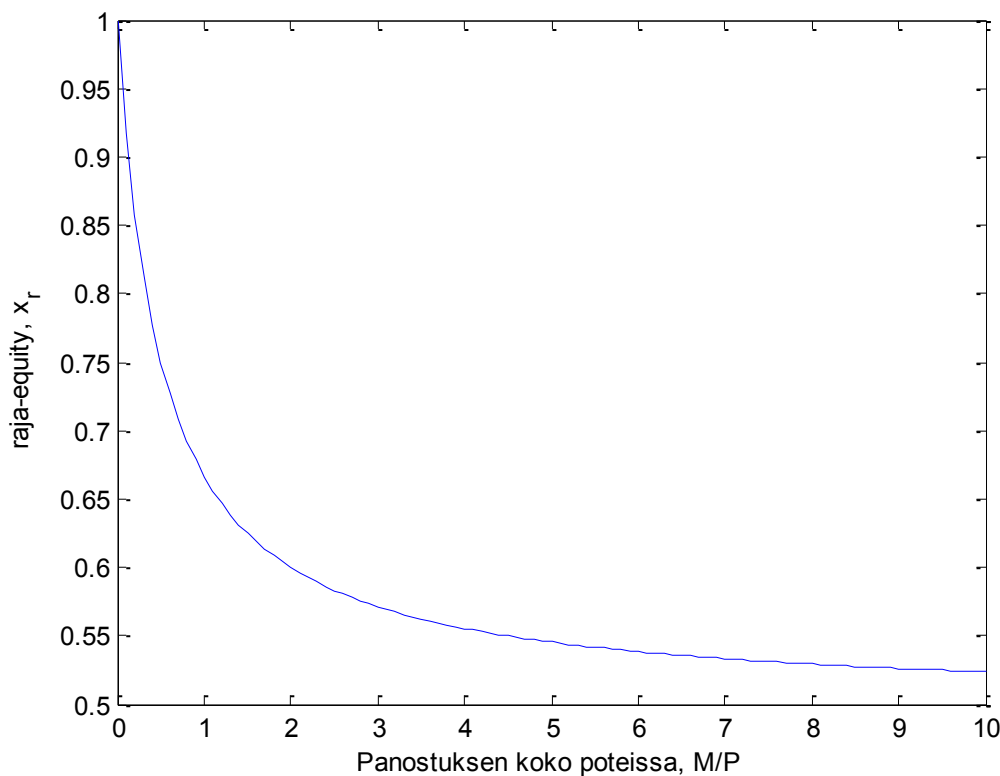
koska voittoskenaariossa saadaan potista P :n verran merkkejä ja vastustajalta M :n verran merkkejä, ja häviöskenaariossa hävitään lyönnin suuruuden verran eli M :n verran.

Jos vastustaja kippaa, panostaja voittaa suoraan potissa olevan määrän P , eli kipin tullessa panostajan odotusarvo on yksinkertaisesti $EV_{\text{kippi}} = P$. Raja-equity x_r joka erottaa arvolyönnit bluffeista, määritellään panostajan equitynä tilanteessa, jossa odotusarvo on yhtä suuri vastustajan kipatessa ja maksaessa eli $EV_{\text{maksu}} = EV_{\text{kippi}}$. Tällöin

$$x_r(P + M) - (1 - x_r)M = P, \quad (2)$$

josta voidaan ratkaista

$$x_r = \frac{P + M}{P + 2M}. \quad (3)$$



Kuva 2. Raja-equity x_r panostuksen koon funktiona.

Jos panostajan equity maksun tullessa on suurempi kuin x_r , on panostus arvolyönti. Mikäli se on pienempi kuin x_r , on panostus bluffi. Lausekkeesta (3) nähdään suoraan, että mikäli potissa ei ole mitään eli $P = 0$, tai lyönnit ovat hyvin suuria verrattuna potin kokoon eli $M \gg P$, arvolyöntiin vaadittavaksi raja-equityksi tulee 0.5. Kuva 2 havainnollistaa, kuinka raja-equity käyttäytyy panostusten koon funktiona. Se vahvistaa aiemmin tehdyn havainnon, jonka mukaan raja-equity lähestyy arvoa 0.5 panostuskokojen kasvaessa suuriksi.

Potti-Omahassa jossa maksimipanostus on potin suuruinen, on olennaista tarkastella vain kuvaajan alkupäätä jossa panostuksen koko on välillä $[0,1]$. Panostettaessa maksimimäärä eli potillinen, on raja-equity $x_r = 2/3 \approx 0.667$. Kun panostuksen kokoa tästä pienennetään, alkaa raja-equity kasvaa hyvin nopeasti. Potti-Omahassa arvolyöntiin vaadittava equity all-in – tilanteessa on siis aina välillä $[2/3,1]$. Kun otetaan huomioon, että ennen riveriä ei suurimmassa osassa tapauksista kummallakaan pelaajalla ole yli 70% equityä, voidaan todeta että luultavasti suurin osa käytännössä tapahtuvista Potti-Oman all-in –lyönneistä ennen riveriä on bluffeja.

Esimerkki 2.1.

Pelataan floppia, ja pöydässä on kortit **T-3-4r**. Merkintä **r** tarkoittaa että floppi on *rainbow*, joka tarkoittaa että kaikki kortit ovat eri maata. Flopin kortit merkitään jatkossa tämän esimerkin merkintätavalla lihavoituna ja viivoilla erotettuina, jotta niiden merkintätapa selkeästi eroaa pelaajien käsien merkintätavasta.

Taulukko 1. Pelaajien equityt flopilla **T-4-3r**.

	Käsi	Equity
Panostaja	ATo	65.60%
Vastustaja	65o	34.40%

Pelaajalla on kädessään ATo, ja hän on yhden vastustajan kanssa flopilla. Merkki o käden perässä tarkoittaa, että kortit ovat *offsuit* eli eri maata. Pelaaja poikkeuksellisesti tietää vastustajansa käden, joka on 65o.

Potissa on 100, ja pelaaja lyö all-in –lyönnin, jonka suuruus on 75. Nyt kaavan (3) antama raja-equity on $(100+75)/(100+2\cdot75) = 0.70$. Molempien pelaajien equityt ovat taulukossa 1. Panostajan equity on 65.60%, joten raja-equity 0.70 ei ylity. Panostajan odotusarvo on suurempi, kun vastustaja kippaa, joten lyönti on bluffi, vaikka prosenteissa vastustajaa johdetaankin.

2.2.2. Arvolyönnit ja bluffit yleisemmin

Yllä oleva malli, joka erottelee arvolyönnit ja bluffit toisistaan ei ole kaikenkattava, ja se pätee ainoastaan all-in –tilanteisiin. Pelaajien equityt muuttuvat kullakin panostuskierroksella ja tilanteet voivat haarautua monilla eri tavoilla. Mikäli panostus ei ole all-in –panostus ja sen jälkeen on vielä jäljellä lisää panostuskierroksia, odotusarvon lauseke muuttuu monimutkaisemmaksi.

Toisaalta pokerin pelaajien keskuudessa ei myöskään ole aina edes määritelmällisesti selvää, mitä bluffilla ja arvolyönnillä kaikissa tilanteissa tarkoitetaan, koska panostuksia voidaan tarkastella yksittäisinä toimenpiteinä tai osana laajempaa kokonaisuutta. Oletetaan esimerkiksi, että pelaaja alkaa panostaa flopilla heikolla kädellä ja hänen pääasiallinen suunnitelmansa on panostaa flopin lisäksi sekä turn että river, ja saada vastustaja kippaamaan riverillä. Jos kaikkia panostuksia tarkastellaan yhtenä kokonaisuutena, voidaan sanoa kyseessä olevan kolmen panostuskierroksen bluffi. Jos puolestaan kunkin panostuksen odotusarvoa tarkastellaan yksitellen, tullaan siihen johtopäätökseen että kaksi ensimmäistä panostusta olivat arvolyöntejä ja vasta viimeinen panostus bluffi; pelaajan odotusarvo kasvaa vastustajan maksaessa kaksi ensimmäistä panostusta, koska sen seurauksena viimeisen panostuksen jälkeen voitetaan suurempi potti vastustajan kipatessa. Useimmat pelaajat määrittelevät tässä tapauksessa kaikki panostukset bluffeiksi, vaikka odotusarvon kannalta olisikin toivottavaa, että vastustaja maksaa kaksi ensimmäistä panostusta.

Tässä työssä jatkossa käsiteltävissä konsepteissa all-in –lyönnit ovat pääasiallisen tarkastelun kohteina ja siksi näihin muiden tilanteiden määritelmiin ei ryhdytä tätä pohdintaa tarkemmin. Osiossa 2.5.7. tarkastellaan turn-tilanteen lyöntejä vahvoilla ja heikoilla käsillä. Kyseisessä osiossa heikoilla käsillä tehdyt lyönnit määritellään aina bluffeiksi, vaikka bluffia jatkettaisiinkin riverillä, ja odotusarvo olisi suurin, kun vastustaja maksaa turnilla ja kippaa riverillä.

2.3. Käsikombinaatioiden laskeminen

2.3.1. Kombinaatiot Texas Hold'emissa

Texas Hold'emissa kullakin pelaajalla on kädessään kaksi korttia joten mahdollisten käsikombinaatioiden laskeminen on verrattain yksinkertaista.

Pokerissa kädessä olevien korttien järjestyksellä ei ole väliä, joten esimerkiksi kuningas ja ässä on sama käsi kuin ässä ja kuningas. Käsikombinaatioiden lukumäärä C_{pariton} , joka mahdollistaa että pelaajalla on kädessään numerot i ja j sisältävä pariton käsi, on

$$C_{\text{pariton}} = K_i \cdot K_j, \quad i \neq j, \quad (4)$$

missä K_n tarkoittaa pakassa jäljellä olevien korttien lukumäärää, joilla on arvo n . Jos esimerkiksi pakassa on jäljellä kaikki neljä ässää ja kuningasta, on olemassa $K_A \cdot K_K = 4 \cdot 4 = 16$ eri tapaa, joilla pelaajalla voi olla ässä ja kuningas kädessään.

Kun pelaajalla on kädessään kaksi samaa numeroa, on hänellä kädessään pari. Käsikombinaatioiden lukumäärä kullekin i -arvoiselle parille on

$$C_{\text{pari}} = \frac{K_i \cdot (K_i - 1)}{2}. \quad (5)$$

Kaava (5) on johdettu siten, että ensin on määriteltä kahden saman numeron muodostamien mahdollisten jonojen lukumäärä. Sen jälkeen lauseke on jaettu kahdella, koska pokerissa korttien järjestyksellä ei ole väliä. Ilman kahdella jakamista parien lukumäärä tulisi laskettua kahteen kertaan, koska eri järjestyksessä olevat kortit lasketaan eri jonoiksi.

Kaikkien mahdollisten aloituskäsien lukumäärä Texas Hold'emissa saadaan, kun yhteenlasketaan lausekkeet (4) ja (5) ja summataan ne kaikkien mahdollisten i :n ja j :n arvojen yli. Erilaisia aloituskäsikombinaatioita on Texas Hold'emissa 1326 kappaletta.

Esimerkki 2.2.

Kombinaatioita laskemalla voidaan arvioida, millä todennäköisyydellä vastustajalla on jokin tietty käsi, kun tiedetään käsivaihtoehdot. Tarkastellaan tilannetta, jossa ollaan flopilla **K-8-2r**, ja tuttu *tiukaksi pelaajaksi* eli vähän käsiä pelaavaksi pelaajaksi osoittautunut vastustaja osoittaa vahvuutta *sökötys-korottamalla* (check-raise), eli sököttämällä ensin ja sitten uudelleenkorottamalla kun vastustaja korottaa. Oletetaan, että hänellä on joko AA, AK, KK, 88 tai 22. Lasketaan näiden oletusten perusteella todennäköisyys kullekin vastustajan käsivaihtoehdolle ja sen perusteella todennäköisyys sille, että oma käsi johtaa vastustajan kättä. Oma käsi on 22.

Pakassa on kaikki ässät jäljellä, joten kaavan (5) mukaan AA:n mahdollistavien kombinaatioiden määrä on $(4 \cdot 3)/2 = 6$.

Flopissa on yksi kuningas, joten mahdollisia AK-kombinaatioita on kaavan (4) mukaan $4 \cdot 3 = 12$.

Pakassa on 3 kuningasta ja kahdeksikkoa, joten kaavan (5) mukaan sekä KK:ta että 88:a on kumpaakin $(3 \cdot 2)/2 = 3$ kombinaatiota.

Omassa kädessä on 22 ja flopilla on yksi kakkonen, joten vastustajalla ei voi olla 22:a; näiden kombinaatioiden lukumäärä on 0.

Vastustajan mahdollisia käsikombinaatioita on $6 + 12 + 3 + 3 = 24$ kappaletta, joten AA:n todennäköisyys on $6/24 = 1/4$, AK:n todennäköisyys $12/24 = 2/4$, KK:n todennäköisyys $3/24 = 1/8$ ja 88:n todennäköisyys $3/24 = 1/8$. Näistä johdetaan AA:ta ja AK:ta, mutta muita käsiä vastaan ollaan perässä. Oma käsi on siis johdossa tässä tilanteessa todennäköisyydellä $1/4 + 2/4 = 3/4$.

2.3.2. Kombinaatiot Potti-Omahassa

Käsikombinaatioita on huomattavasti enemmän PLO:ssa kuin NL Hold'emissa, koska kullakin pelaajalla on neljä korttia kädessään. Todettakoon vertailun vuoksi, että edellisessä osiossa kerrottiin NL Hold'em:n aloituskäsikombinaatioiden määrän olevan 1326. PLO:ssa vastaava luku erilaisten aloituskäsikombinaatioiden määrälle on 270 725. Seuraavaksi tarkastellaan, minkä tyylistä käsistä PLO:n aloituskädet koostuvat ja mikä on kombinaatioiden lukumäärä kullekin käsityypille.

Kunkin *rundown-käden* eli neljä eriarvoista korttia sisältävän PLO-käden kombinaatioiden lukumäärä C_{RD} on

$$C_{RD} = K_i \cdot K_j \cdot K_z \cdot K_k, \quad i \neq j, k, z \text{ \& } j \neq i, k, z \text{ \& } k \neq j, i, z, \quad (6)$$

missä K_n tarkoittaa pakassa jäljellä olevien korttien lukumäärää, joilla on arvo n . Jos pakassa on kaikki kortit jäljellä, on kunkin tietyt arvot sisällään pitävän rundown-käden kombinaatioiden lukumäärä $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ ja kaikkien mahdollisten rundown-käsien kombinaatioiden määrä on $\binom{13}{4} \cdot 256 = 183\,040$. Kerroin 256:n edessä on vaihtoehtojen määrä sille, millä tavoin 4 erilaista arvoa voidaan valita korttipakan 13 eri arvosta.

Yhden i -arvoisen parin ja pariutumattomat j - ja z -arvoiset kortit sisältävän PLO-käden kombinaatioiden lukumäärä on

$$C_{\text{pari}} = \frac{K_i \cdot (K_i - 1)}{2} \cdot K_j \cdot K_z, \quad i \neq j, k \text{ \& } j \neq z. \quad (7)$$

Lausekkeessa olevan tulon ensimmäinen termi on lukumäärä jolla pari voidaan muodostaa kahdesta kortista (ja se on sama kuin kaavassa (5)) ja tämän jälkeiset termit antavat pariutumattomien apukorttien kombinaatioiden lukumäärän. Kaikkien yhden parin (joita on 13 erilaista) sisällään pitävien käsikombinaatioiden lukumäärä täydellä pakalla olisi täten

$13 \cdot (4 \cdot 3)/2 \cdot \binom{12}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 82\,368$, koska paritutumattomien apukorttien joukko voidaan valita $\binom{12}{2}$ eri tavalla.

Tuplapari on PLO:ssa käsi, jossa on i -arvoinen pari ja toinen j -arvoinen pari. Tuplaparin muodostavien kombinaatioiden lukumäärä on

$$C_{TP} = \frac{K_i \cdot (K_i - 1)}{2} \cdot \frac{K_j \cdot (K_j - 1)}{2}, \quad i \neq j. \quad (8)$$

Kaikkien tuplaparin muodostavien käsikombinaatioiden lukumäärä täydellä pakalla on $\binom{13}{2} (4 \cdot 3)/2 \cdot (4 \cdot 3)/2 = 2808$, koska i -parin ja j -parin sisältävä tuplapari voidaan muodostaa $\binom{13}{2}$ eri tavalla.

Lasketaan vielä kuinka monta kolme samanarvoista korttia sisällään pitävää kättä voi täydestä pakasta muodostaa: kolme samaa voidaan muodostaa $13 \cdot \binom{4}{3}$ eri tavalla ja neljäs apukortti voidaan valita $\binom{12}{1} \cdot 4$ eri tavalla jolloin kombinaatioiden lukumäärä kädelle, jossa on kolme samaa korttia, on $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{1} \cdot 4 = 2496$. Neljä samanarvoista korttia sisällään pitävä käsi voidaan muodostaa 13 eri tavalla, koska neljä kutakin arvoa sisällään pitävää kättä on vain 1.

Summataan vielä ylläolevat eri aloituskäsien määrät täydelle pakalle: $183\,040 + 82\,368 + 2808 + 2496 + 13 = 270\,725$, eli kokonaismääräksi saadaan se mitä pitääkin. Yhteenvedona voidaan todeta että PLO:ssa rundown-käsien osuus aloituskäsistä on 67.61%, yhden parin sisällään pitävien käsien osuus on 30.42%, tuplaparien osuus on 1.04% ja muiden käsien osuus on 0.93%.

PLO:ssa käsikombinaatioita on niin paljon, että pelitilanteessa tuskin kukaan laskee täsmällisiä kombinaatiomääriä yhteen päässä laskuna, kuten Texas Hold'em –pelaajat usein tekevät. Sen sijaan PLO-pelaajat laskevat suhteellisia kombinaatiomääriä eli sitä, kuinka moninkertainen määrä kombinaatioita jotakin tiettyä kättä on mahdollista muodostaa verrattuna johonkin toiseen käteen. Tämä perustuu siihen, että lausekkeista (6)-(8) saadaan pudotettua ylimääräisiä termejä pois, kun niitä jaetaan toisillaan.

Tätä menetelmää voidaan käyttää esimerkiksi tilanteessa, jossa ollaan flopilla **K-8-3r**, ja halutaan tietää kuinka suuri määrä kombinaatioita kuninkaan ja kahdeksikon muodostavia kaksia pareja boardiin osumattomilla apukorteilla vastustajalla on mahdollista olla verrattuna kuningaskolmosiin sekä kahteen pariutumattomaan ja boardiin osumattomaan apukorttiin muodostaviin käsikombinaatioihin. Tällöin jaetaan lauseke (6) lausekkeella (7), ja tässä tilanteessa tulokseksi saadaan $(K_K \cdot K_8 \cdot K_z \cdot K_j) / [K_K \cdot (K_K - 1)/2 \cdot K_z \cdot K_j]$, joka on yhtä kuin $(K_K \cdot K_8) / [K_K \cdot (K_K - 1)/2] = (3 \cdot 3) / [3 \cdot 2/2] = 3$. Osumattomat apukortit K_z ja K_j siis supistuvat lausekkeesta pois, ja valitunlaisia kaksia pareja on kombinaatioina 3 kertaa niin paljon kuin valitunlaisia kolmosia.

2.4. Käsivalikoimat

Pokerissa hyvin harvoin tiedetään tarkasti, mitä vastustajalla on kädessä; yleensä siitä voidaan tehdä korkeintaan valistunut arvaus. Kun pokerissa arvioidaan vastustajan kättä, arvio tehdään sen perusteella, miten vastustaja on pelannut aikaisemmin. Tällöin tarkastellaan, kuinka usein pelaaja on panostanut tietyistä positiosta tietyn suuruisen panostuksen. Arvioksi saadaan useimmiten yksittäisen käden sijaan *käsivalikoima* (hand range), joka on käsijoukko johon pelaajan käden arvioidaan sisältyvän. Käsivalikoimat tulivat osaksi pokerin peruskäsitteistöä viimeistään 2008, kun julkaistiin tätä aihetta ansiokkaasti aikanaan tarkastellut strategiaopas *Let There Be Range* [10].

Käsivalikoima NL Hold'emissa tai PLO:ssa on joukko, johon kuuluvat kädet pelaajalla voi olla kädessään jonkin valitun pelisuorituksen jälkeen. Jos esimerkiksi tiedetään, että vastustaja uudelleenkorottaa NL Hold'emissa potin suuruisen lyönnin big blindilta pre-flopissa 2% ajasta, eikä bluffaa heikoilla käsillään tai koskaan *slouvaa* (slowplay) eli pelkästään maksa vahvoilla käsillään hämäyksen vuoksi, voidaan käsivalikoimaksi arvioida 2% parhaista aloituskäsistä.

Parhaaseen kahteen prosenttiin aloituskäsistä sisältyvät NL Hold'emissa kymppipari ja kaikki sitä suuremmat taskuparit, joten tällainen käsivalikoima on {AA, KK, QQ, JJ, TT}. Kyseisestä käsivalikoimasta käytetään jatkossa notaatiota {TT+}, joka siis tarkoittaa kymppiparin ja suuremmat parit sisällään pitävää valikoimaa. Samaa notaatiota tullaan käyttämään jatkossa yleisemminkin siten, että {ii+} tarkoittaa käsivalikoimaa, johon kuuluvat *i*-pari ja kaikki sitä suuremmat taskuparit, kun *i* tarkoittaa kortin arvoa. Lisäksi käsivalikoimalle, jossa on kaikki taskuparit väliltä *i* ja *j*, käytetään merkintää {ii-jj}. Esimerkiksi {88-TT} tarkoittaa käsiä 88, 99 ja TT.

Notaatiota {ij+} tullaan käyttämään NL Hold'emien käsivalikoimille, joihin sisältyvät kaikki paritutumattomat kädet, joissa suurempi kortti on arvoltaan *i* ja pienempi kortti on suurempi tai yhtäsuuri kuin *j*. Muodollisesti ilmaistuna {ij+} on siis käsivalikoima, johon sisältyvät kaikki kädet *im*, joissa $i > m \geq j$. Esimerkiksi {AJ+} tarkoittaa käsivalikoimaa {AJ, AQ, AK}. Näitä merkintätapoja käytetään tässä työssä paljon, ja ne on koottu esimerkkeineen myös sivulle 58, jossa on nähtävillä muutkin tämän työn merkintätavat.

PLO:n käsivalikoimat kirjoitetaan aaltosulkeiden sisään kuten Texas Hold'eminkin käsivalikoimat. Merkintä x käsivalikoimassa tarkoittaa PLO:ssa kaikkia mahdollisia arvoja, joita kyseisellä tavalla merkitty kortti voi saada. Esimerkiksi {AAxx} tarkoittaa kaikkia mahdollisia ässäparikombinaatioita.

Aina kun käsivalikoiman tai sen osajoukon edessä on murtoluku suluissa, sisältyy kyseisen käsijoukon käsistä suluissa olevalla murtoluvulla kerrottu osuus kombinaatiomääriä käsivalikoimaan. Jos esimerkiksi käsivalikoima on {AA, (1/2)KK}, sisältyy käsivalikoimaan kaikki mahdolliset kombinaatiot ässäpareja ja puolet mahdollisista kuningasparikombinaatioista.

Esimerkissä 2.1. käytettiin merkintätapaa *o* käden perässä kuvaamaan tilannetta, jossa NL Hold'emien aloituskädessä olevat kortit olivat eri maata. Vastaavasti kun NL Hold'emien aloituskäden molemmat kortit ovat samaa maata, käytetään tälle merkintää *s* (suited). Nämä

merkinnät liitetään myös käsivalikoimiin siten, että kun käsivalikoiman perään kirjoitetaan o, sisältyy käsivalikoimaan vain sellaisia aloituskäsiä, joiden kortit ovat keskenään eri maata. Vastaavasti kun käsivalikoiman perään kirjoitetaan s, sisältyy käsivalikoimaan vain sellaisia aloituskäsiä, joiden kortit ovat samaa maata. Esimerkiksi {KTs+} tarkoittaa käsiä KTs, KJs ja KQs.

Koska usean käden sisällään pitävä käsivalikoima on yleensä tarkin arvio, joka pelaajien käsistä voidaan tehdä, on pelitilanteissa järkevää tarkastella equityjä pelaajien käsivalikoimia vastaan sen sijaan, että tarkasteltaisiin equityä yksittäistä kättä vastaan. Tämä voidaan tehdä, kun lasketaan kullekin käsivalikoiman kädelle esiintymistodennäköisyys sen kombinaatioiden lukumäärän perusteella ja kerrotaan tällä esiintymistodennäköisyydellä kyseisen käden equity. Lopuksi summataan nämä käsivalikoiman yksittäisten käsien painotetut equityt yhteen, jolloin saadaan koko valikoiman equity. Esimerkki 2.3 valaisee tätä.

Esimerkki 2.3

Taulukko 2. QQ:n equityt pre-flopissa vastustajan käsivalikoiman yksittäisiä käsiä vastaan.

Käsi	AA	KK	QQ	AK
QQ	18.45%	18.07%	50%	56.06%

Pelaajalla on kädessään QQ ja hän on 4-betannut preflopissa vastustajaa, joka korottaa all-in. Oletetaan, että vastustajan käsivalikoima tässä tilanteessa on tiedossa, ja se on {AK, QQ+}. Tarkoitus on laskea pelaajan käden equity tätä käsivalikoimaa vastaan. Taulukossa 2 ovat Monte Carlo –simuloinnilla lasketut pelaajan equityt kutakin vastustajan käsivalikoimaan sisältyvää yksittäistä aloituskättä vastaan. Seuraavaksi lasketaan kaavoja (4) ja (5) käyttäen, kuinka monta erilaista kombinaatiota on kutakin vastustajan kättä. AA:ta ja KK:ta on kumpaakin $(4 \cdot 3)/2 = 6$ kombinaatiota, AK:ta on $4 \cdot 4 = 16$ kombinaatiota ja QQ:ta on 1 kombinaatio, koska pelaajalla on itsellään QQ. Vastustajan käsivalikoimassa on yhteensä 29 kombinaatiota. QQ:n equity P koko vastustajan käsivalikoimaa vastaan on

$$P = \frac{6}{29} \cdot 0.1845 + \frac{6}{29} \cdot 0.1807 + \frac{1}{29} \cdot 0.50 + \frac{16}{29} \cdot 0.5606 = 0.4021.$$

2.5. Nashin tasapaino

Nashin tasapaino yleisesti kahden pelaajan pelissä on strategiapari, josta kummankaan pelaajan ei kannata poiketa, mikäli toinen pelaajista pelaa Nashin tasapainon mukaista strategiaa. Nashin tasapaino on nimetty John Nashin mukaan, ja sen nykyinen määritelmä ja tutkiminen matemaattisena konseptina sai alkunsa vuonna 1950 John Nashin kirjoittamien artikkeleiden jälkeen. Näitä artikkeleita olivat esimerkiksi paretotehokkuutta neuvottelutilanteessa tarkasteleva 'The Bargaining Problem' [11], tämänkin työn pokeriaihepiiriin liittyvä artikkeli

‘A Simple Three-Person Poker Game’ [12], sekä ‘Equilibrium Points in N-Person Games’ [13], jossa Nash määritteli Nashin tasapainon aiempaa laajemmin ja tämän ansiosta pystyi soveltamaan teoriaansa *Kakutanin kiintopistelausetta* (Kakutani fixed point theorem). Nash osoitti, että jokaiseen peliin, jossa on äärellinen määrä vaihtoehtoja, on olemassa *sekastrategiaa* noudattava Nashin tasapaino. Sekastrategian merkitys selitetään tarkemmin tämän luvun osiossa 2.5.4.

Muodollinen määritelmä kahden pelaajan pelin Nashin tasapainolle on esitetty alla.

Määritelmä 2.1. Olkoon Q_1 pelaajan 1 mahdollisten strategioiden joukko ja $q_1 \in Q_1$ pelaajan 1 valitsema strategia. Vastaavasti Q_2 on pelaajan 2 mahdollisten strategioiden joukko ja $q_2 \in Q_2$ pelaajan 2 valitsema strategia. Strategiapari (q_1^N, q_2^N) on kahden pelaajan pelissä Nashin tasapaino, jos pätee

$$\pi_1(q_1^N, q_2^N) \geq \pi_1(q_1, q_2^N), \forall q_1 \in Q_1, \quad (9)$$

$$\pi_2(q_1^N, q_2^N) \geq \pi_2(q_1^N, q_2), \forall q_2 \in Q_2, \quad (10)$$

missä π_1 on pelaajan 1 tuottofunktio, ja π_2 on pelaajan 2 tuottofunktio.

2.5.1. Matriisipelin ratkaiseminen

Kun pelaajien strategioita on äärellinen määrä, voidaan mikä tahansa kahden pelaajan peli esittää matriisimuotoisena tulostaulukkona. Matriisipelin tulostaulukossa taulukon rivit kuvaavat yhden pelaajan strategiavaihtoehtoja ja sarakkeet kuvaavat toisen pelaajan strategiavaihtoehtoja. Taulukon alkioihin kirjataan kummankin pelaajan tulos valitun strategiaparin toteutuessa. Nashin tasapaino määritetään tulostaulukosta tarkastelemalla strategioita pareittain: kiinnitetään jokin vastapelaajan strategia ja alleviivataan parhaan oman strategian tulostulokset taulukosta. Tehdään tämä molemmille pelaajille ja kaikille strategiavaihtoehdoille, jolloin Nashin tasapaino löytyy kohdasta, jossa molemmat tulostulokset on alleviivattu.

Ylivoimaisesti tunnetuin ja referoiduin matriisipeli on vangin dilemma, ja se on kuriositeetin vuoksi käyty läpi alla olevassa esimerkissä 2.4, joka valaisee yksinkertaisen matriisipelin ratkaisemista. Vangin dilemman perusasetelma on sellainen, että kaksi toimijaa on tehnyt jotakin rangaistavaa ja joutuvat viranomaisen edessä päättämään, vaikenevatko rikkeen tekemisestä vai tunnustavatko. Molempien vaikeneminen minimoisi kokonaisrangaistuksen ja oman edun ajaminen eli tunnustaminen minimoisi yksittäisen toimijan rangaistuksen. Vangin dilemmaa on pohdittu paljon psykologian, taloustieteen ja evoluutiobiologian aloilla, ja sen yhteydessä yleensä tarkastellaan yhteistyön merkitystä peliteoreettisissa ongelmissa. Se on selitetty tarkemmin esimerkiksi peliteorian perusteoksessa ‘A Primer in Game Theory’ [14]. Seuraavassa esimerkissä sitä kuitenkin käytetään vain valaisemaan, kuinka yksinkertaisen matriisipelin Nashin tasapaino ratkaistaan.

Esimerkki 2.4

AP ja JP ovat yhdessä varastaneet kasinon tiskiltä korvapuustin ja syöneet sen puoliksi tarjoilijan ollessa muualla. Turvakameroihin on tallentunut viitteitä siitä, ketkä saattaisivat olla asialla, mutta henkilökunnalla ei ole riittävästi todisteita antaa pojille porttikieltoa ellei ainakin toinen heistä tunnusta. Henkilökunta eristää pojat toisistaan ja kysyy kummaltakin, haluaako vaieta vai tunnustaa. Ehdot ovat sellaiset, että toisen tunnustaessa teon ja toisen vaietessa vaikenija saa 3 viikon porttikiellon ja tunnustaja ei saa porttikieltoa lainkaan. Jos taas molemmat tunnustavat, kumpikin saa 2 viikkoa porttikieltoa, ja jos molemmat vaikenevat, kumpikin saa viikon porttikiellon. Tulostaulukko on esitetty alla, ja siinä kussakin alkiossa on ensin esitetty AP:n porttikiellon suuruus ja sen jälkeen JP:n porttikiellon suuruus valitulle strategiaparille. Etsitään Nashin tasapaino tilanteessa, jossa molemmat minimoivat ainoastaan omaa rangaistustaan.

Taulukko 3. Tulostaulukko vangen dilemmaan.

	JP vaikenee	JP tunnustaa
AP vaikenee	-1,-1	-3, <u>0</u>
AP tunnustaa	<u>0</u> ,-3	<u>-2</u> , <u>-2</u>

Nashin tasapainoa etsittäessä kiinnitetään ensin vaihtoehto, jossa JP vaikenee ja sen jälkeen alleviivataan AP:n tulosvaihtoehtoista parempi. Tämän jälkeen kiinnitetään vaihtoehto, jossa JP tunnustaa, ja alleviivataan jälleen parempi tulosvaihtoehto. Tehdään sama toimenpide JP:n tulosvaihtoehtoillemme, kun AP:n strategiavaihtoehto kiinnitetään, ja lopulta saadaan Nashin tasapaino kohdasta, jossa molempien tulosvaihtoehto on alleviivattu, eli tasapainoa noudattavassa strategiaparissa molemmat tunnustavat.

Pokerissa vaihtoehtojen määrä on useimmiten niin suuri, että matriisimuotoisen tulostaulukon tekeminen ei onnistu, eikä ole edes järkevää. NL Holdemissa aloituskäsien määrä on yli 1300 ja PLO:ssa yli 270 000, ja lisäksi eri panostuskokoja kullekin kädelle on valittavissa usein satoja erilaisia, joten tulostaulukoiden ylöskirjaaminen ja lukeminen tapahtuu lähinnä tietokoneiden avulla. Joissakin erikoistapauksissa vaihtoehtojen määrää voidaan kuitenkin intuitiivisilla oletuksilla rajoittaa sen verran, että luettavissa olevien tulostaulukoiden tekeminen on mahdollista. Tällaisia tapauksia ovat esimerkiksi jotkut pre-flop tilanteet, joissa pelaajan kannattaa selkeästi joko panostaa all-in tai kipata, eikä muita vaihtoehtoja huomioida. Näitä tilanteita on mallinnettu tämän luvun osiossa 2.5.5.

2.5.2. Nashin tasapaino pokerissa

Jotta Nashin tasapainoa voitaisiin tarkastella pokerissa määritelmän 2.1. mukaisesti, täytyy ensin määritellä funktio pokeristrategialle ja pokerinpelaajien tuottofunktiot. Pokeristrategia kertoo, mitä pelaaja tekee pelin kussakin eteen tulevassa tilanteessa. Muodollisemmin

ilmaistuna pokeristrategia kertoo minkä toimenpiteen pelaaja vuorollaan suorittaa, kun on ilmennyt tapahtuma $t \in T$ ja kädessä on pokerikäsi $h \in H$, missä H on mahdollisten aloituskäsiä joukko. Tapahtuma t tarkoittavaa sitä, mitä boardiin on jaettu ja miten vastustaja on pelannut, ja T on kaikkien mahdollisten tapahtumien joukko. Pokeristrategiaa kuvataan funktiolla

$$q(t, h) \in A, \quad a \in A, \quad (11)$$

missä $A = \{\text{korotus, kippi, maksu, sökötyks}\}$, eli a on jokin pelaajan vuorollaan suorittama toimenpide.

Suhteellisen yksinkertaisen näköisestä lausekkeestaan huolimatta pokeristrategia, joka kattaisi kaikki mahdolliset tilanteet, on useimmissa pokerivariaatioissa täysin mahdotonta kirjoittaa ylös ja sitä on hyvin vaikeaa mallintaa tietokoneillakaan. Tämä johtuu siitä että useimmissa pokeripeleissä ja etenkin tässä työssä tarkasteltavissa NL Hold'emissa ja PLO:ssa eteen tulevien tilanteiden määrä on todella suuri. Esimerkiksi NL Hold'emissa eri aloituskäsiillä vastaantulevien erilaisten tilanteiden yhteenlaskettu määrä on suuruusluokkaa 10^{12} , ja PLO:ssa erilaisten tilanteiden lukumäärä on vielä huomattavasti suurempi. Tämän vuoksi strategiaa, joka kertoo yksityiskohtaisesti mitä tehdä kussakin näistä tilanteista, on hyvin haasteellista ellei mahdotonta mallintaa. Nashin tasapainoa laskettaessa on siksi rajoitettava vaihtoehtoja a :lle, h :lle ja t :lle, eli tarkasteltava joitakin valittuja ja rajattuja tilanteita. Tyypillinen tilanne, jossa esimerkiksi A :ta eli pelaajalle mahdollisten toimenpiteiden määrää rajoitetaan Nashin tasapainoa laskettaessa, on pre-flop-peli jossa merkkipinot ovat alle 10bb:n suuruisia. Tällöin usein määritellään $A = \{\text{all-in-panostus, kippi}\}$, eli pelataan strategiaa, jossa vaihtoehdot ovat ainoastaan panostaa all-in tai kipata. Tähän palataan myöhemmin tässä työssä.

Pelaajan i tuottofunktio π_i on pelipäätöksestä a_i aiheutuvat odotusarvoiset voitot EV , eli

$$\pi_i(q_i, q_j) \in EV(a_i, a_j), \quad (12)$$

kun vastustaja pelaa strategiaa q_j , eli suorittaa toimenpiteen a_j .

Kuten yllä todettiin, pelipäätösten jälkeen tilanteet voivat haarautua niin monilla eri tavoilla että yksikäsitteinen odotusarvon määrittäminen on haastavaa. Odotusarvon laskeminen on yksinkertaisinta all-in –tilanteissa, joiden jälkeen tapahtumat eivät haaraudu enää. Kaava (1) on yksi esimerkki tällaisen tilanteen odotusarvon laskemisesta, ja se voitaisiin kaavan (12) notaatiota käyttäen kirjoittaa muotoon

$$EV(\text{all-in-panostus, maksu}) = x(P + M) - (1 - x)M. \quad (13)$$

Mikäli halutaan laskea koko odotusarvo all-in-panostuksen jälkeen, täytyy käydä läpi eri vaihtoehdot, joilla vastustaja voi reagoida all-in –panostukseen, eli maksu ja kippi. Tällöin odotusarvo pelaajalle, joka panostaa all-in, on

$$EV(\text{all-in}) \in p \cdot EV(\text{all-in-panostus, maksu}) + (1 - p) \cdot EV(\text{all-in-panostus, kippi}), \quad (14)$$

missä p on todennäköisyys, jolla vastustaja maksaa all-in –panostuksen.

All-in –panostukset ovat niitä tilanteita, joista kannattaa lähteä liikkeelle Nashin tasapainoa laskettaessa, koska tällöin vastustajan vaihtoehdot rajoittuvat maksuun ja kippiin, ja toisaalta jako myös päättyy eikä haaraudu enää uusiin tilanteisiin ja uusiin pelipäätöksiin. Tässä työssä tarkastellaan Nashin tasapainoa pääosin juuri all-in –tilanteissa.

2.5.3. Tasapainoa noudattavan strategian hyödyt pokerissa

Määritelmästä 2.1. seuraa, että Nashin tasapainon mukaisen strategian valitseminen maksimoi odotusarvon, kun molemmat pelaajat tietävät toistensa strategian. Pokerissa kuitenkin pelaajat eivät useimmiten tiedä tarkalleen, kuinka vastustaja pelaa. Vastustajan strategiasta tehdään päätelmiä ja valistuneita arvauksia pelihistorian perusteella. Nashin tasapainon pelaaminen tulee hyödylliseksi vasta, kun pelataan hyvää ja tarkkaavaista vastustajaa vastaan ja pelihistoria on pitkä. Nykypäivänä tällaiset tilanteet eivät ole niin harvinaisia kuin esimerkiksi kymmenen vuotta sitten, koska apuohjelmat ja statistiikkaohjelmat kuten Hold'em manager ovat yleistyneet huomattavan paljon, ja niitä käyttävät lähes kaikki vähänkään vakavasti tai voittamistarkoituksessa pokeria harrastavat. Tämän takia säännöllisesti ja paljon pelaavilla internet-pokerin pelaajilla on tallessa kymmeniätuhansia käsiä monista vastustajistaan.

Nashin tasapainon yksi olennainen hyöty pokerissa on, että se määrittää alarajan tuottofunktiolle, joka tässä tapauksessa tarkoittaa rahallista odotusarvoa. Kun pelaajat tietävät toistensa strategiat, maksimoivat molemmat pelaajat odotusarvonsa Nashin tasapainon mukaisella strategialla. Pokerissa toisen pelaajan odotusarvoinen voitto on toisen pelaajan odotusarvoinen tappio, ja tästä seuraa, että jos itse pelataan Nashin tasapainon mukaista strategiaa ja vastustaja pelaa jotakin muuta strategiaa, vastustajan odotusarvo voi mennä vain alaspäin ja oma odotusarvo ylöspäin. Tällöin Nashin tasapaino takaa odotusarvolle alarajan, joka on paras mahdollinen alaraja.

Toinen hyöty on, että kukaan vastustaja ei voi pelata *eksplloitatiivisesti* (exploit) eli poiketa tasapainostrategiasta ja täten kasvattaa omaa odotusarvoaan. Tyypillisesti hyvät pelaajat pelaavat eksplloitatiivisesti huonompia pelaajia vastaan, ja mikäli joudutaan pelaamaan jossakin potissa parempaa pelaajaa vastaan, voidaan Nashin tasapainoa noudattavalla strategialla suojautua eksplloitatiivisilta strategioilta. Nashin tasapainoa noudattavia strategioita voi olla hyödyllistä käyttää myös tuntemattomia pelaajia vastaan pelatessa, jolloin ei ole mahdollista noudattaa pelihistoriaan perustuvaa eksplloitatiivista strategiaa, eikä vastustajista välttämättä ole muutenkaan paljoa lähtöoletuksia.

Kiteytettynä siis Nashin tasapainoa noudattavia strategioita voi olla hyödyllistä pelata joko täysin tuntematonta vastustajaa vastaan tai sitten hyvää vastustajaa vastaan, jonka kanssa on pitkä yhteinen pelihistoria. Lisäksi se takaa odotusarvolle alarajan. Useimmissa tapauksissa ei käytännössä ole odotusarvon kannalta optimaalista pelata Nashin tasapainon mukaista strategiaa, vaan eksplloitatiivisia strategioita, ja tästä on kerrottu hieman lisää luvussa 4. Näissäkin tapauksissa pelaajalle on silti hyödyllistä tuntea tasapainokonsepti, jotta pelaaja tiedostaa, kuinka kauas tasapainosta kulloinkin poiketaan.

2.5.4. Tasapainopisteet löytyvät sekastrategioilla

Pokeri on *nollasummapeli*, jossa pelaajien intressit ovat vastakkaiset. Toisen pelaajan voitto on toisen pelaajan tappio, ja oman odotusarvon maksimointi minimoi vastustajan odotusarvon. Nollasummapelissä kaikkien pelaajien odotusarvojen summa on 0, ja tämä toteutuu pokerissa jaon alkaessa, jos pelissä ei ole *rakea*. Rake tarkoittaa mahdollista pelinjärjestäjän ottamaa pientä osuutta pelatuista poteista, ja se tekisi pelaajien odotusarvojen summasta negatiivisen. Tässä työssä tarkastellaan tilanteita, joissa poteista ei makseta rakea.

Mikäli ei huomioida kokonaisen jaon odotusarvoa, vaan keskitytään yksittäiseen pelitilanteeseen, pokerin voi ajatella myös olevan *vakiosummapeli*, jossa kaikissa mahdollisissa skenaarioissa odotusarvojen summa on sama vakioluku, joka on potin koko. Jos esimerkiksi viimeiselle panostuskierrokselle tultaessa on pottiin kerääntynyt 100e, on jaossa mukana olevien pelaajien odotusarvojen summa tässä vaiheessa jakoa 100e. Jotta voidaan analysoida jakojen eri vaiheissa tapahtuvia pelipäätöksiä yksi kerrallaan, onkin järkevää tarkastella pokeria käytännössä vakiosummapelinä. Teoriassa vakiosummapeli ei eroa nollasummapelistä, koska odotusarvot voidaan aina normeerata siten, että niiden summa on 0, ja vakiosummapeli voidaan tällä tavoin esittää nollasummapelinä.

Nollasummapeliin ja vakiosummapeliin ei yleensä löydy Nashin tasapainoa *puhtailla strategioilla*, joissa pelaajan kannattaisi aina valita jokin tietty strategia, kuten esimerkissä 2.4. Nollasummapelin ratkaisu sen sijaan on yleensä *sekastrategia*, jossa pelaaja pelaa eri todennäköisyyksillä kutakin strategiavaihtoehtoaan. Pelaajan i sekastrategia $q_i = (p_1, \dots, p_n)$ on todennäköisyysjakauma valittavina olevien n :n strategiavaihtoehtojen yli, ja p_z , $1 \leq z \leq n$, on kunkin valittavana olevan strategian z valintatodennäköisyys. Nashin tasapaino kahden pelaajan pelissä määritellään sekastrategioille samoin kuin määritelmässä 2.1, mutta sekastrategioiden tapauksessa q_1 ja q_2 ovat todennäköisyysjakaumia. Voidaan myös ajatella, että puhtaat strategiat ovat sekastrategioiden erikoistapauksia, joissa p_z saa jollekin strategialle arvon 1 ja arvon 0 muille strategioille.

Viime vuosikymmeninä sekastrategioita on pidetty osin ongelmallisina siksi, että inhimillisen toimijan on hyvin vaikeaa ellei mahdotonta muuttaa strategiaansa aidosti satunnaiseksi [15]. Esimerkiksi kivi-paperi-sakset –pelissä Nashin tasapainoa noudattaa sekastrategia (1/3 kivi, 1/3 paperi, 1/3 sakset), jonka noudattamiseksi pelaajan pitäisi jollakin tavalla pystyä valitsemaan täysin satunnaisesti vaihtoehtojen väliltä siten, että pitkässä juoksussa kutakin strategiaa valitaan yhtä paljon. Vielä vaikeampaa on vaihtoehtojen täsmällinen arpominen, mikäli pelataan peliä, jossa kutakin strategiaa painotetaan eri tavalla. Ihmispelaajan olisi hyvin vaikeaa noudattaa esimerkiksi sekastrategiaa (0.0833, 0.1579, 0.7588) käyttämättä satunnaisgeneraattoria apunaan.

Pokerissa tämä satunnaistamisen ongelma pystytään osittain väistämään, koska tietyt toimenpiteet tehdään tietyillä käsivalikoimilla, ja laskettavissa on, kuinka suurella todennäköisyydellä minkäkin käsivalikoiman käsi on pelaajan kädessä. Pokerin pelaajalle on siis mahdollista käyttää korttipakkaa satunnaisgeneraattorina, jonka suorittamien arvontojen perusteella pelaaja voi valita omia strategioitaan ja määrittää niiden valintatodennäköisyyksiä. Esimerkiksi luvun 3 osiossa 3.1.1. saadaan eräs NL Hold'em:n pre-flop-tilanteeseen liittyvä tulos, jonka mukaan pelaajan olisi tasapainostrategiaa noudattaakseen maksettava

käsivalikoimalla $\{TT+,AKs,(1/6)99\}$ ja kipattava muulloin. Käden 99 pelaamiseen voi nyt aluksi näyttää pätevän yllä mainittu satunnaistamisen ongelma, koska se pitää pelata 1/6 ajasta ja kipata muulloin. Kaavaa (5) käyttäen voidaan kuitenkin todeta, että koska 99:n muodostavia kombinaatioita on pre-flopissa 6, voidaan sekastrategia toteuttaa pelaamalla yksi mahdollisista kombinaatioista ja kippaamalla viisi. Voidaan esimerkiksi päättää pelata aina, kun kyseisessä tilanteessa kädessä on $9♥9♣$ ja kipata kaikki muut 99-kombinaatiot.

Kokonaan ei satunnaistamisen ongelmaa pystytä pokerissakaan väistämään, koska monin paikoin sekastrategiat pitävät sisällään hyvin pieniä todennäköisyyksiä, jotka eivät ole käsikombinaatioiden todennäköisyyksien monikertoja, ja tätä tapahtuu sitä enemmän, mitä tarkemmin Nashin tasapainopisteitä arvioidaan. Tällaisissa tapauksissa ei voida yksikäsitteisesti sanoa, miten pelaajat satunnaistavat päätöksiään. Yleinen käytännön ilmiö on, että hyvin pienten todennäköisyyksien strategiat putoavat kokonaan pois pelaajien strategiavaihtoehdoista, jolloin valittu sekastrategia altistuu tarkkaavaisen pelaajan eksplotiivisille strategioille.

Nashin tasapainoa sekastrategioille ratkotaan tässä työssä joissakin kohdin *indifferenssiehdon* perusteella. Sekastrategioille indifferenssiehdon toteutuminen tarkoittaa, että pelaajan jokaisen tasapainoa noudattavan sekastrategian toiminnon, jonka todennäköisyys on nollaa suurempi, hyödyn odotusarvo on sama. Indifferenssiehdon toteutuessa siis pelaajalle on samantekevää minkä strategian hän valitsee, mikäli kyseisen strategian valintatodennäköisyys on tasapainoa noudattavassa sekastrategiassa positiivinen. Indifferenssiehto toteutuu vastustajan strategiavaihtoehdoille, kun itse pelataan tasapainostrategiaa. Tämä on hyödyllinen ominaisuus tasapainoja laskettaessa, ja sen avulla tullaan jatkossa ratkomaan odotusarvoyhtälöistä tuntemattomia parametreja.

2.5.5. Tasapainokäsivalikoima NL Hold'em in all-in- panostuksiin pre-flopissa

Tässä osiossa muodostetaan laskennallinen menetelmä Nashin tasapainon arvioinnille NL Hold'em in kaksinpelitilanteessa, jossa ollaan pre-flopissa ja pelimerkkipinot ovat niin pienet suhteessa pottiin, että pelaajan kannattaa joko panostaa all-in tai kipata. Tarkasteltavaan tilanteen tultaessa pelissä on mukana kaksi pelaajaa, jotka yleensä ovat kaksinpelissä SB ja BB. Oletukset jotka tilanteesta tehdään ovat seuraavat:

1. Tilanteeseen tultaessa pelaaja voi joko panostaa all-in tai kipata. Minkään muun suuruista panostusta kuin all-in –panostusta ei voi tehdä.
2. Pelaajat muodostavat panostus- ja maksukäsivalikoimansa parhaista mahdollisista käsistä. Jos esimerkiksi pelaaja panostaa 10% ajasta, hän panostaa parhailla 10% käsistään siitä käsivalikoimasta, joka hänellä oli tilanteeseen tultaessa ja kippaa huonoimmat 90% käsistensä.

Kohta 2. vaatii hieman tarkennusta, koska käsien paremmuusjärjestys ei pokerissa ole absoluuttista, vaan riippuu pelitilanteesta. Esimerkiksi käsi AK pärjää Texas Hold'emissa QQ:ta vastaan paremmin kuin 22, mutta käsi 22 johtaa kaksinpelitilanteessa kättä AK. Tässä työssä

käsien paremmuusjärjestys on käsivalikoimia muodostettaessa valittu siten, että parhaita käsiä ovat ne kädet, jotka pärjäävät simulaatioissa parhaiten kolmea satunnaista kättä vastaan. Tämä paremmuusjärjestys on yksinkertaistus kuten kaikki muutkin paremmuusjärjestykset, mutta se valittiin, koska se ottaa sopivasti huomioon korkeita kortteja sisältävien käsien ja myös vetokäsien arvon.

Tarkastellaan seuraavaksi todennäköisyyttä, jolla tilanteeseen tultaessa ensimmäisenä vuorossa oleva pelaaja panostaa all-in. Merkitään all-in-panostusvalikoimassa olevien käsien kombinaatioiden lukumäärää termillä C_b . Todennäköisyys jolla panostus tehdään, on

$$p_b = \frac{C_b}{C_x}, \quad (15)$$

missä C_x on panostavan pelaajan käsivalikoimassa olevien kombinaatioiden lukumäärä panostustilanteeseen tultaessa. Pelaaja kippaa todennäköisyydellä $(1 - p_b)$ ja mikäli näin käy, jako päättyy.

Vastaavasti toisena vuorossa olevan pelaajan todennäköisyys maksulle all-in –panostuksen tultua on

$$p_c = \frac{C_c}{C_y}, \quad (16)$$

missä C_c on maksuvalikoimassa olevien käsikombinaatioiden lukumäärä ja C_y on pelaajan käsivalikoimassa olevien käsikombinaatioiden lukumäärä maksutilanteeseen tultaessa.

Nashin tasapainon arvioimiseksi tarvittavat odotusarvofunktiot kummallekin pelaajalle voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$EV^{\text{panostaja}} = p_b \cdot (1 - p_c) \cdot \text{potti} + p_b \cdot p_c \cdot [(1 - \text{equity}) \cdot (\text{potti} + C_{\text{stack}}) - \text{equity} \cdot B_{\text{stack}}], \quad (17)$$

$$EV^{\text{maksaja}} = p_c \cdot [\text{equity} \cdot (B_{\text{stack}} + \text{potti}) - (1 - \text{equity}) \cdot C_{\text{stack}}], \quad (18)$$

missä B_{stack} on panostajan pelimerkkipino ja C_{stack} maksajan pelimerkkipino juuri ennen all-in –panostuksen tapahtumista. Kaavoissa equity tarkoittaa maksavan pelaajan equityä all-in –panostuksen tekevää pelaajaa vastaan silloin, kun maksu tehdään, ja potti tarkoittaa potin kokoa all-in –tilanteeseen tultaessa. Lisäksi määritellään, että efektiivisen pelimerkkipinin suuruus on $B_{\text{stack}} + (\text{panostajan aiemmat sijoitukset pottiin}) = C_{\text{stack}} + (\text{maksajan aiemmat sijoitukset pottiin})$. Kaavoissa (17) ja (18) on poikkeuksellisesti symbolien sijaan käytetty kokonaisia sanoja kuvaamaan suureita, jotka saavat numeerisia arvoja. Tämä on tehty, jotta kaavat voitaisiin ymmärtää helpommin kuin sellaista merkintätapaa, jossa käytettäisiin jokaiselle suurelle omaa erikseen selitettävää symbolia. Odotusarvoyhtälöissä käytetään jatkossakin joissakin kohdin kokonaisia sanoja, joilla on myös oma erillinen merkityksensä tekstissä.

Kaavan (17) ensimmäinen termi laskee odotusarvon tilanteelle, jossa panostetaan ja vastustaja kippaa, ja potti voitetaan suoraan. Toinen termi laskee odotusarvon tilanteelle, jossa panostetaan ja vastustaja maksaa. Tällöin käydään läpi skenaario, jossa panostaja voittaa sekä potin että

maksajan stackin eli Cstackin, ja skenaario jossa panostaja häviää oman pelimerkkipinonsa eli Bstackin.

Kaavassa (18) on vastaavasti laskettu odotusarvo toisena vuorossa olevalle pelaajalle, kun hän päättää maksaa. Tässä tapauksessa käydään aluksi läpi skenaario, jossa maksaja voittaa all-in – tilanteen ja tämän seurauksena potin ja panostajan stackin eli Bstackin. Tämän jälkeen käydään läpi skenaario, jossa maksaja häviää all-in –tilanteen ja tämän seurauksena oman pelimerkkipinonsa. Kummassakaan kaavassa (17) ja (18) ei käydä läpi skenaariota, jossa pelaaja päättää kipata, koska kipin kontribuutio pelaajan omaan odotusarvoon on aina 0.

Huomionarvoista on, että tällä menetelmällä laskettuna odotusarvojen summa $EV^{\text{maksaja}} + EV^{\text{panostaja}}$ ei ole vakio, vaikka kyseessä onkin vakiosummapeli. Tämä johtuu siitä, että maksajan odotusarvoon ei ole laskentatehon vuoksi laskettu niitä skenaarioita, joissa SB kippaa ja BB voittaa potin suoraan ennen kuin hänen toimintavuoronsa on edes tullut. Näitä skenaarioita ei ole tarpeellista laskea auki Nashin tasapainoa ratkaistaessa, koska kyseiset tilanteet eivät vaikuta BB:n strategiaan millään tavalla. Riittää huomioida käsivalikoima, joka on vastassa silloin kun all-in –panostus tulee. Mikäli kaikkien skenaarioiden odotusarvojen summa kuitenkin halutaan laskea, se saadaan kaavalla

$$EV_{\text{total}} = (1 - p_b) \cdot \text{potti} + p_b \cdot EV^{\text{maksaja}} + EV^{\text{panostaja}}, \quad (19)$$

ja se antaa tulokseksi kaikissa tilanteissa potin koon, joka pokerissa aina yleisestikin saadaan tulokseksi summattaessa kaikkien pelaajien odotusarvot.

Kaavoissa (17) ja (18) oleva equity selvitetään simulaatioiden avulla kuhunkin tilanteeseen erikseen. Equity-simulaatioiden tarkastelu on hyvin yleistä pokerin pelaajien keskuudessa, ja sitä voi tehdä ilmaiseksi useilla internet-sivustoilla, kuten esimerkiksi sivustolla www.propokertools.com. Tämän työn equity-laskelmat on tehty PokerStove-ohjelmalla sekä pokerstrategy.com –sivuston Equilab- ja Equilab-Omaha -ohjelmistoilla. Lisäksi osiossa 2.6 on käytetty OddsOracle –nimistä ohjelmaa yksityiskohtaisempien simulaatioiden suorittamiseen.

Taulukossa 4 on esimerkki simulaatituloksista käsivalikoimien equityistä toisiaan vastaan. Siinä on ylimmällä rivillä käsivalikoimina NL Hold’emin parhaat 20-70% aloituskäsistä viiden prosenttiyksikön välein. Vasemmanpuoleisessa sarakkeessa on samat käsivalikoimat. Taulukon alkioissa on esitetty kunkin ylimmän rivin käsivalikoiman equity kutakin vasemmanpuoleisen sarakkeen käsivalikoimaa vastaan. Jatkossa equity-tilauknot tullaan muodostamaan siten, että ylimmän rivin käsivalikoimat ovat maksavan pelaajan käsivalikoimia ja vasemmanpuoleisen sarakkeen käsivalikoimat ovat panostavan pelaajan käsivalikoimia, jolloin alkioissa oleva equity on aina maksajan equity panostajaa vastaan. Jos esimerkiksi toinen pelaaja panostaa pre-flopissa all-in kaikilla käsillä, jotka sisältyvät parhaaseen 40%:een aloituskäsistä, ja toinen pelaaja maksaa käsillä, jotka sisältyvät parhaaseen 20%:een aloituskäsistä, on taulukon 4 mukaisesti maksajan equity maksun tullessa keskimäärin 56%.

Jotta näistä equityistä voitaisiin ratkaista Nashin tasapaino all-in panostuksille aikaisemman matriisipeliesimerkin 2.4 taulukon 3 mukaisella tavalla, on simuloitujen equityjen avulla laskettava odotusarvot kummallekin pelaajalle ja tehtävä niistä matriisimuotoinen taulukko.

Taulukko 4. Eri käsivalikoimien equityjä. Taulukkoon on merkitty ylimmän rivin käsivalikoimien equityt prosentteina vasemmanpuoleisimman sarakkeen käsivalikoimia vastaan.

	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%	65%	70%
20%	50	48	46	45	44	43	42	41	40.6	40	39
25%	52	50	48	47	46	45	44	43	42	41.4	41
30%	54	52	50	49	48	46.4	45.4	44.4	44	43	42
35%	55	53	51	50	49	48	47	46	45	44	43.4
40%	56	54	52	51	50	49	48	47	46	45	44.3
45%	57	55	53.6	52	51	50	49	48	47	46.3	45.5
50%	58	56	54.6	53	52	51	50	49	48	47	46.4
55%	59	57	55.6	54	53	52	51	50	49	48	47.4
60%	59.4	58	56	55	54	53	52	51	50	49	48
65%	60	58.6	57	56	55	53.7	53	52	51	50	49
70%	61	59	58	56.6	55.7	54.5	53.6	52.6	52	51	50

Mikäli ollaan pre-flop-tilanteessa, jossa yhtään korotusta ei olla vielä tehty, on p_c maksukäsien osuus kaikista pelin aloituskäsistä ja p_b on panostuskäsien osuus kaikista pelin aloituskäsistä, koska kyseiseen tilanteeseen tultaessa molemmilla pelaajilla on 100% pelin aloituskäsistä käsivalikoimassaan. Tällainen tilanne on esimerkiksi alla esimerkissä 2.5, jossa lasketaan tasapaino 10bb-stackien tilanteeseen, jossa panostaja päättää pre-flopissa joko panostaa all-in tai kipata. Taulukon 4 equityistä saadaan laskettua panostajan odotusarvo $EV^{\text{panostaja}}$ ja maksajan odotusarvo EV^{maksaja} kaavoilla (17) ja (18).

Kaavojen (17) ja (18) antamat arvot lasketaan MATLAB 7.1 –ohjelmistolla kussakin simulaatiopisteessä. Kun panostajan sekä maksajan odotusarvot on laskettu, ne lisätään taulukkoon kunkin equityn tilalle. Tällöin muodostuu uusi taulukko, jonka jokaisessa alkiossa on kummankin pelaajan odotusarvo kyseisillä strategioilla. Tämän jälkeen voidaan käydä rivit ja sarakkeet läpi, kuten aiemmin vangin dilemmaa apuna käyttäen selitettiin, ja laskea Nashin tasapaino. Esimerkki 2.5 valaisee, kuinka kaavoja (17) ja (18) käytännössä hyödynnetään equity-tilukkoita tarkasteltaessa, ja kuinka niiden avulla lasketaan arvio Nashin tasapainolle.

Esimerkki 2.5

Ollaan kaksinpelitilanteessa, jossa pieni blindi on buttonilla ja toimii ensimmäisenä pre-flopissa. Stackit ovat 10bb:n suuruiset ennen sokkohanosten asettamista, eli sokkohanosten asettamisen jälkeen SB:llä on 9.5bb:n suuruinen stack ja BB:llä on 9bb:n suuruinen stack. Kaavojen (17) ja (18) muuttujat Bstack ja Cstack saavat siis arvot 9.5bb ja 9bb. Potissa on sokkohanosten asettamisen jälkeen 1.5bb. Tarkoitus on laskea arvio Nashin tasapainoa noudattaville käsivalikoimille, kun oletetaan että SB voi joko panostaa all-in tai kipata.

Lasketaan kaavoilla (17) ja (18) sekä panostajan että maksajan odotusarvot taulukon 4 equityille ja tehdään uusi taulukko 5, jossa equityt korvataan pelaajien odotusarvoilla annetussa

pelitilanteessa. Kuhunkin taulukon alkioon ylemmälle riville on merkitty panostajan odotusarvo, ja alemmalle riville maksajan odotusarvo. Seuraavaksi alleviivataan kultakin sarakkeelta paras odotusarvo panostajalle ja kultakin riviltä paras odotusarvo maksajalle. Arvio Nashin tasapainolle löytyy alkioista, jossa molempien pelaajien odotusarvo on alleviivattu.

Tässä tapauksessa Nashin tasapainon arvioidaan toteutuvan strategioilla, joissa SB panostaa 55% aloituskäsistään ja kippaa loput kätensä, ja BB maksaa 40% aloituskäsistään ja kippaa loput kätensä. Parhaat 55% pelin aloituskäsistä tarkoittaa käsivalikoimaa {33+,A2s+,K2s+,Q2s+,J3s+,T5s+,95s+,85s+,75s+,65s,A2o+,K4o+,Q6o+,J7o+,T7o+,97o+,87o}, ja parhaat 40% aloituskäsistä tarkoittaa käsivalikoimaa {44+,A2s+,K2s+,Q4s+,J7s+,T7s+,97s+,87s,A3o+,K7o+,Q8o+,J8o+,T9o}.

Nashin tasapainoa noudattavat strategiat siis ovat:

SB: Panostetaan all-in, kun käsi sisältyy parhaaseen 55% aloituskäsistä eli käsivalikoimaan {33+,A2s+,K2s+,Q2s+,J3s+,T5s+,95s+,85s+,75s+,65s,A2o+,K4o+,Q6o+,J7o+,T7o+,97o+,87o}, ja kipataan muulloin.

BB: Maksetaan, kun käsi sisältyy parhaaseen 40% aloituskäsistä eli käsivalikoimaan {44+,A2s+,K2s+,Q4s+,J7s+,T7s+,97s+,87s,A3o+,K7o+,Q8o+,J8o+,T9o}, ja kipataan muulloin.

Taulukko 5. Panostajan odotusarvot bb:inä mitattuna yläpuolella. Maksajan odotusarvot alapuolella.

	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%	65%	70%
20%	0.26 0.2	0.27 0.15	0.288 0.06	0.3 0	0.316 -0.08	0.336 -0.18	0.36 -0.3	0.388 -0.44	0.406 -0.528	0.43 -0.65	0.468 -0.84
25%	0.305 0.28	0.316 0.25	0.33 0.18	0.34 0.14	0.355 0.08	0.375 0	0.4 -0.1	0.43 -0.22	0.465 -0.36	0.492 -0.47	0.515 -0.56
30%	0.342 0.36	0.345 0.35	0.36 0.30	0.366 0.28	0.378 0.24	0.412 0.126	0.438 0.04	0.47 -0.066	0.486 -0.12	0.528 -0.26	0.576 -0.42
35%	0.385 0.40	0.385 0.40	0.399 0.36	0.403 0.35	0.413 0.32	0.43 0.27	0.455 0.2	0.487 0.11	0.525 0	0.57 -0.13	0.60 -0.224
40%	0.424 0.44	0.42 0.45	0.432 0.42	0.432 0.42	0.44 0.40	0.456 0.36	0.48 0.3	0.512 0.22	0.552 0.12	0.6 0	0.639 -0.098
45%	0.459 0.48	0.45 0.50	0.443 0.516	0.455 0.49	0.459 0.48	0.473 0.45	0.495 0.4	0.527 0.33	0.567 0.24	0.6 0.169	0.644 0.07
50%	0.49 0.52	0.475 0.55	0.462 0.576	0.47 0.56	0.47 0.56	0.48 0.54	0.50 0.5	0.53 0.44	0.57 0.36	0.62 0.26	0.652 0.196
55%	0.517 0.56	0.495 0.60	0.475 0.636	0.479 0.63	0.473 0.64	0.479 0.63	0.495 0.6	0.523 0.55	0.56 0.48	0.61 0.39	0.64 0.336
60%	0.55 0.576	0.51 0.65	0.504 0.66	0.48 0.70	0.468 0.72	0.468 0.72	0.48 0.7	0.504 0.66	0.54 0.60	0.588 0.52	0.65 0.42
65%	0.585 0.60	0.533 0.68	0.507 0.72	0.475 0.77	0.455 0.80	0.466 0.783	0.455 0.8	0.475 0.77	0.507 0.72	0.55 0.65	0.611 0.56
70%	0.6 0.64	0.56 0.70	0.504 0.78	0.482 0.812	0.45 0.856	0.45 0.855	0.448 0.86	0.465 0.836	0.462 0.84	0.5 0.78	0.56 0.7

On olemassa joitakin internet-sivustoja, joilla voi laskea tasapainostrategiaa noudattavia all-in-panostajan käsivalikoimia, mikäli ollaan esimerkin 2.5 mukaisessa kaksinpelitalanteessa ja ensimmäisenä vuorossa olevan pelaajan vaihtoehdot ovat joko panostaa all-in tai kipata. Yksi tällainen internet-sivusto on [www.holdemresources.net](http://www.holdemresources.net/hr/sngs/hucalculator.html?action=calculate&r=10.0) ja tarkka linkki laskuriin on <http://www.holdemresources.net/hr/sngs/hucalculator.html?action=calculate&r=10.0>.

Tarkastellaan vertailun vuoksi kyseisen sivuston antamia lukuja, jotka ovat 10bb:n stackeilla ja muilla tämän esimerkin luvuilla seuraavat: SB panostaa 58.3% käsivalikoimalla ja BB maksaa 37.4% käsivalikoimalla.

Sivuston antamat luvut ovat kohtuullisen lähellä esimerkissä 2.5 laskettuja tuloksia, ja ne ovat myös tarkempia. Tämä johtuu siitä että esimerkin 2.5 simulaatioissa tarkasteltiin rajallista määrää käsivalikoimia, ja pelaajan oli mahdollista laajentaa valitsemansa strategian käsivalikoimaa ainoastaan 5% kerrallaan eikä käsi kerrallaan. Vertailu Holdemresources-sivuston antamaan tulokseen kuitenkin osoittaa, että simulaatioiden ja kaavojen (17) ja (18) mukainen menetelmä antaa lupaavia ja lähelle osuvia tuloksia, ja niitä todennäköisesti voitaisiin tarkentaa vielä huomattavasti lisää, mikäli valittavissa olevien käsivalikoiden suuruuseroja pienennettäisiin tarpeeksi. Tämän kappaleen menetelmän etu on, että sitä voidaan käyttää laajemmin ja useammissa tapauksissa kuin Holdemresources-sivuston tasapainolaskuria, jota voi käyttää ainoastaan silloin, kun toinen pelaaja on asettanut vain suuren sokkohanoksen verran rahaa pottiin, ja all-in-panostus on suuren sokkohanoksen jokin monikerta. Tämän kappaleen menetelmää voidaan käyttää missä tahansa tilanteessa, jossa pelaaja menee all-in pre-flopissa.

Tässä työssä lasketaan Nashin tasapainolle arvioita yllä olevaa menetelmää käyttäen seuraavissa NL Holdemin pre-flop-tilanteissa: kahdessa 5-bet-all-in –tilanteessa 100bb:n stackeilla ja kahdessa 3bet-all-in –tilanteessa 15bb:n stackeilla. Näiden tilanteiden laskennalliset tulokset ja niiden analysointia on nähtävissä luvussa 3.

2.5.6. Tasapainostrategiaa noudattava käsivalikoima riverin all-in -panostuksiin

Kun Nashin tasapainoa lasketaan analyttisesti ja ilman simulaatioita, on yksinkertaisinta aloittaa river-tilanteista, koska river on viimeinen panostuskierros eikä lisää kortteja ole enää tulossa pöytään. Koska kortteja ei ole enää tulossa, ei oman käden equity vastustajan yksittäistä kättä vastaan enää muutu, vaan kullekin yksittäiselle kädelle se on 100% , 0% tai 50%. Equity on 100%, kun oma käsi on parempi kuin vastustajan käsi, 0% kun vastustajan käsi on parempi kuin oma käsi, ja 50% kun molemmilla pelaajilla on sama käsi, ja tällöin potti splitataan, mikäli peli etenee showdowniin. River-all-in -tilanteissa Nashin tasapaino löytyy all-in -panostuksille, kun noudatetaan strategiaa, jonka seurauksena vastustajalle on odotusarvon kannalta samantekevää kippaako hän vai maksaako. Vastustaja ei siis pysty pelaamaan eksplotiivisesti lisäämällä käsivalikoimansa maksukäsien määrää tai kippikäsien määrää.

Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa panostajan käsivalikoima on *polarisoitu*, eli sisältää vain hyvin vahvoja käsiä ja heikkoja käsiä, eikä lainkaan keskivahvoja käsiä. Lisäksi vastustajan käsivalikoimassa on vain *bluff catchereita*, jotka voittavat kaikki panostajan käsivalikoiman heikot kädet ja häviävät kaikille panostajan käsivalikoiman vahvoille käsille. Lisäksi tässä

vaiheessa oletetaan, että pelaajien käsivalikoimien käsissä ei ole samanarvoisia kortteja eli käsivalikoimat eivät *blokkaa* toisiaan eli pienennä mahdollisten kombinaatioiden lukumäärää.

Menetelmä, jolla tällaisessa river-tilanteessa löytyy tasapainokäsivalikoima all-in – panostukselle, on seuraava:

1. Kirjoitetaan vastustajalle indifferenssiehto, eli määritetään vastustajan maksun odotusarvo EV_{maksu} samaksi kuin kipin odotusarvo EV_{kippi} . Koska kipin odotusarvo on aina nolla, voidaan indifferenssiehto kirjoittaa muotoon $EV_{\text{maksu}} = (\text{potti} + \text{panostus}) \cdot b - \text{panostus} \cdot (1 - b) = 0$, missä b on todennäköisyys jolla panostaja bluffaa. Ratkaistaan b , joka on $b = \text{panostus} / (\text{potti} + 2 \cdot \text{panostus})$.
2. Muodostetaan omasta käsivalikoimasta panostusvalikoima, johon lisätään ensin kaikki polarisoituneen käsivalikoiman vahvat kädet, joilla tehdään arvolyönti. Tämän jälkeen lisätään panostusvalikoimaan mitä tahansa bluffikäsikombinaatioita sen verran että koko panostusvalikoimalla tehtävä panostus on $(1 - b)$ osan ajasta arvolyönti ja bluffi b osan ajasta.

Huomionarvoista on, että mikäli aiempia panostuskierroksia ei olla pelattu Nashin tasapainon mukaisesti, vaan valittu eksplotiivisia strategioita, ei käsivalikoimassa välttämättä ole alunperinkään riverille tultaessa riittävää määrää bluffikäsiä tai arvolyöntikäsiä. Jos esimerkiksi pelataan pelaajaa vastaan, joka maksaa kaikilla käsillään kaikki panostukset, ei bluffikäsiä ole optimaalista odotusarvon maksimoimisen kannalta sisällyttää omaan käsivalikoimaan aiemmilla panostuskierroksilla, eikä niitä silloin voida riverille tultaessakaan sisällyttää all-in-panostusvalikoimaan tasapainoon tarvittavaa b osaa ajasta. Tällaisessa tilanteessa Nashin tasapaino ratkeaa puhtailla strategioilla, ja tasapainostrategiaparissa panostaja panostaa koko käsivalikoimallaan ja vastustaja kippaa kaikilla käsillään. Jos taas käsivalikoimassa ei ole riittävästi arvolyöntikäsiä, panostajan ei kannata lyödä millään käsivalikoimansa käsillä, ja vastustajan kannattaa maksaa kaikilla käsivalikoimansa käsillä.

Lähestytään yllä selitettyä kahden vaiheen menetelmää esimerkin 2.6 kautta, jossa kerrotaan käytännössä kuinka vastustaja tehdään kuvatuslaisessa river-tilanteessa indifferentiksi päätöksensä suhteen aikaisempien kappaleiden työkaluja käyttäen.

Esimerkki 2.6

Ollaan river-tilanteessa, ja boardi on $3♥3♣4♥4♦♣$. Potissa on kaksi pelaajaa, joita kutsutaan tässä esimerkissä A:ksi ja B:ksi. Pelaaja A on 3-betannut pre-flopissa BB:ltä, kun pelaaja B on korottanut paikalta button. Pelaaja B on maksanut 3-betin, jonka jälkeen A on lyönyt sekä flopilla että turnilla, ja B on maksanut kummallakin kerralla. Pelaajat tuntevat toistensa strategiat niin hyvin, että kumpikin tietää toisen pelaajan käsivalikoiman, eli niiden käsien joukon jolla vastustaja pelaa mainitun tilanteen kyseisellä tavalla. Pelaajan A käsivalikoima on $\{JJ+, 65\}$, ja pelaajan B käsivalikoima on $\{77-TT\}$. Etsitään näillä oletuksilla pelaajalle A

sellainen käsivalikoima, joka noudattaa Nashin tasapainoa, kun pelaaja A lyö potin suuruisen all-in –lyönnin riverillä, ja pelaajalla B on yhtä suuri stack kuin pelaajalla A.

Edetään yllä kuvatun kaksivaiheisen menetelmän mukaisesti:

1. Ratkaistaan indifferenssiehdoista johdetulla kaavalla bluffin todennäköisyys, kun all-in-panostus tehdään: $b = \text{panostus} / (\text{potti} + 2 \cdot \text{panostus}) = \text{potti} / (\text{potti} + 2 \cdot \text{potti}) = \frac{1}{3}$.
2. Muodostetaan panostusvalikoima johon lisätään ensin kaikki polarisoituneen käsivalikoiman vahvat kädet eli {JJ+}, koska kaikki kyseisen valikoiman kädet voittavat kaikki pelaajan B käsivalikoiman kädet. Kutakin paria JJ, QQ, KK ja AA on kaavalla (5) laskettuna 6 kombinaatiota, joten neljä erilaista paria sisältävässä arvolyöntivalikoimassa on yhteensä 24 kombinaatiota. Bluffivalikoimassa olisi täten oltava 12 kombinaatiota, ja sen tulisi koostua käden 65 muodostavista kombinaatioista. Kaavan (4) mukaan on olemassa 16 eri kombinaatiota, jotka muodostavat käden 65. Jotta käsivalikoima noudattaisi tasapainoa, olisi valittava 4 kombinaatiota, jotka pudotetaan pois all-in-lyönnin bluffikäsivalikoimasta; sillä ei ole väliä mitkä kombinaatiot ne ovat. Pelaaja voi esimerkiksi jättää lyömättä all-in – bluffin aina kun kädessä on 6♥, jolloin all-in-lyöntivalikoima on tasapainossa ja se on {JJ+, (3/4)65}.

Indifferenssiehtoja käyttäen voidaan ratkaista myös tasapainoa noudattava käsivalikoima, jolla vastustaja maksaa panostuksen. Pelaajan B on maksettava 50% ajasta ja kipattava 50% ajasta, koska pelaaja A riskeeraa panostuksellaan potillisen voittaakseen saman verran. Kun puolet ajasta maksetaan, pelaaja A on indifferentti sen suhteen, lisääkö hän bluffikäsiä valikoimaansa vai ei. Puolet käsistä valittuna pelaajan B käsivalikoiman yläpäästä on {99,TT}.

Tasapainokäsivalikoimat molemmille ovat siis seuraavat:

Pelaaja A, panostetaan {JJ+, (3/4)65}.

Pelaaja B, maksetaan {99,TT}.

Lisähuomiona voidaan todeta, että tähän river-tilanteeseen tultaessa panostajan odotusarvo on selkeästi suurempi kuin maksajan, ja tämä johtuu siitä että riverille tultaessa panostajan käsivalikoimassa on hyvin paljon vahvoja käsiä. Kun panostaja sököttää riverin, sököttää myös maksaja aina perässä polarisoitua käsivalikoimaa vastaan ja voittaa potin (sama odotusarvo on panostuksella, johon alkuperäinen panostaja aina kippaa). Tämä tapahtuu vain neljällä 65-kombinaatiolla eli todennäköisyydellä 0.1, kun panostajan kaikkia kombinaatioita on riverille tultaessa 40. Muilla kombinaatioilla panostaja lyö all-in, ja hänen odotusarvonsa on potin suuruinen. Aiempien streettien strategiat siis eivät ole noudattaneet Nashin tasapainoa, koska riverille tultaessa tasapainostrategiat antavat paljon suuremman odotusarvon panostajalle kuin maksajalle.

Yllä esitetty kaksivaiheinen menetelmä ei toimi yhtä suoraviivaisesti, mikäli ei tehdä oletusta siitä, että käsivalikoimat eivät blokkaa toisiaan. Mikäli valikoimat blokkaavat toisiaan eli

sisältävät käsiä, joissa on samoja kortteja, täytyy kombinaatiot kullekin blokatulle kädelle laskea erikseen kutakin vastustajan kättä vastaan. Jos esimerkissä 2.6 maksajan käsivalikoima olisi $\{77\text{-TT}\}$:n sijaan $\{66\text{-TT}\}$, blokkaisivat kädet 66 ja panostajan käsivalikoimassa olevat kädet 65 toisiaan. Tällöin panostajan käsivalikoimassa olisi riverille tultaessa 8 kombinaatiota kättä 65, kun vastustajalla on 66, mutta täydet 16 kombinaatiota kaikkia muita vastustajan käsivalikoiman käsiä vastaan.

Esitelty menetelmä ei myöskään toimi silloin, kun osa panostajan vahvoista käsistä voittaa osan maksajan maksuvalikoimasta, mutta häviää osalle maksuvalikoiman käsistä. Tilanne on tällainen esimerkiksi silloin kun ollaan esimerkissä 2.6 vastaavassa tilanteessa, jossa panostajan käsivalikoima on sama kuin esimerkin tapauksessa eli $\{JJ+,65\}$, mutta maksajan käsivalikoima on tilanteeseen tultaessa $\{77\text{-QQ}\}$. Tällöin lyöntien määrittäminen arvolyönneiksi ja bluffeiksi ei ole yhtä helppoa kuin esimerkin 2.6 tapauksessa, koska kun panostajalla on esimerkiksi JJ, hän voittaa suurimman osan maksajan käsivalikoimasta, mutta *splittaa* (split) eli voittaa puolet potista kun maksajalla on sama käsi eli JJ, ja häviää kun maksajalla on QQ.

Näistä syistä menetelmää pitää muuttaa, mikäli sen halutaan toimivan yleisessä tapauksessa. Yleisessä tapauksessa on laskettava kunkin oman käden equity vastustajan koko käsivalikoimaa vastaan, kuten esimerkissä 2.3 tehtiin. Tämän jälkeen omien käsien equityistä lasketaan painotettu keskiarvo, jossa kunkin oman käden equityä painotetaan sen mahdollistavien kombinaatioiden lukumäärällä. Tällä tavoin tullaan laskeneeksi oman käsivalikoiman equity vastustajan käsivalikoimaa vastaan. Monimutkaiselta kuulostavasta selostuksesta huolimatta käsivalikoimien equityt toisiaan vastaan pystytään laskemaan nykyään varsin helposti ja nopeasti simulaatioiden avulla. Riverin all-in -tilanteessa Nashin tasapainoon vaadittava indifferenssiehto toteutuu, kun maksajan käsivalikoiman equity saa arvon

$$e_{tp} = \frac{\text{panostus}}{\text{potti} + 2 \cdot \text{panostus}}, \quad (20)$$

joka on sama lauseke kuin mikä polarisoidun ja ei-blokkaavan käsivalikoiman tapauksessa laskettiin tasapainostrategian mukaiseksi bluffien osuudeksi panostusvalikoimassa.

Jos tiedetään maksajan Nashin tasapainoa noudattava käsivalikoima, voidaan tasapainoa noudattava all-in –panostusvalikoima muodostaa siten, että tarkastellaan aluksi arvolyöntivalikoiman equityä maksajan *rajakättä* vastaan. Rajakäsi tarkoittaa huonointa maksajan käsivalikoiman kättä, jolla hän maksaa all-in –panostuksen, mikäli hän pelaa Nashin tasapainon mukaista strategiaa. Tämän jälkeen lisätään lyöntivalikoimaan bluffikäsiä sen verran, että maksajan equity nousee kyseisessä tilanteessa kaavan (20) antamaan arvoon e_{tp} , jolloin all-in-panostusvalikoima noudattaa tasapainoa. Tämä pätee kaikilla streeteillä tasapainoa noudattavalle all-in –panostusvalikoimalle.

Toisiaan blokkaavien käsivalikoimien tasapainostrategiat ovat usein sekavia ja epäintuitiivisia, eikä niiden pilkuntarkka noudattaminen pariinkymmenen sekuntiin rajatussa pelipäättötilanteessa monissa tapauksissa onnistu kuin tietokoneohjelmalta. On käytännössä hyvin haastavaa noudattaa strategiaa, jossa kipataan jokin tietty käsi osa ajasta ja maksetaan

samankaltaisessa tilanteessa osa ajasta ja tehdään tätä jollakin pienellä todennäköisyydellä, jota noudatetaan tarkasti.

Käytännön tilanteeseen soveltuvuutensa vuoksi yllä esitetty kaksivaiheinen menetelmä polarisoidun ja ei-blokkaavan käsivalikoiman tapaukseen on hyödyllinen, mikäli tarvittavat oletukset pystytään tekemään. Esimerkissä 2.6 kuvatussa tilanteessa, jossa on panostettu aggressiivisesti joka streetillä, on käsivalikoima todellisessa pelitilanteessakin hyvin suurella todennäköisyydellä polarisoitunut, koska tällaisissa tapauksissa keskivahvat kädet usein sököttäisivät jollakin streetillä. Tämä johtuu siitä että keskivahvojen käsien panostaessa aggressiivisesti jokaisen streetin, suurin osa huonommista käsistä kippaa ja vain paremmat kädet maksavat.

2.5.7. Riveriä edeltävien streettien Nashin tasapaino ja takaperininduktio

Kun river-tilanteille on ratkaistu Nashin tasapaino, voidaan turn-tilanteet ratkaista menetelmällä, jonka nimi on takaperininduktio. Takaperininduktioa käytetään yleisestikin peliteoriassa tarkasteltaessa sellaisia pelejä, joissa pelaajien tekemät päätökset seuraavat ajallisesti toisiaan eli ovat perättäisiä. Menetelmä toimii siten, että ensin ratkaistaan viimeisen pelissä tapahtuvan päätöstilanteen Nashin tasapaino ja otetaan kyseinen ratkaisu huomioon sitä edeltävässä päätöstilanteessa, jossa jälleen ratkaistaan tämän pohjalta Nashin tasapaino. Noudatetaan samaa menetelmää jälleen tätä edeltävään päätöstilanteeseen ja toistetaan toimenpidettä, kunnes pelin kaikki päätöstilanteet on käyty läpi.

Pokerissa tämä toimii kaksinpelissä siten, että ensin ratkaistaan river-tilanteiden Nashin tasapaino ja kummankin pelaajan odotusarvot tasapainoa noudattavalle strategiaparille. Tämän jälkeen poistetaan river-päätökset päätöspuusta ja korvataan ne skenaariolla jossa molemmat pelaajat saavat riverille siirryttäessä tasapainostrategiaporin mukaiset lisäykset odotusarvoonsa. Nyt viimeiset päätöstilanteet pelissä ovat turn-tilanteet, joille voidaan puolestaan ratkaista Nashin tasapaino. Menetelmää voidaan teoriassa jatkaa pelin ensimmäisiin päätöksiin pre-floppiin asti poistamalla aina päätöspuun viimeiset päätöstilanteet ja korvaamalla ne tasapainoa noudattavan strategiaporin odotusarvoilla.

Käytännössä tätä ei kuitenkaan voida tehdä kovin helposti yksittäisiä turn-tilanteita pidemmälle. Kun pakasta poistetaan molempien pelaajien kädet, flopin 3 korttia ja turn-kortti, kussakin turn-tilanteessa on NL Holdemissa mahdollista tulla $52-2-2-3-1=44$ erilaista river-korttia, joilla Nashin tasapaino pitää ratkaista ennenkuin päästään takaperininduktiolla rakaisemaan turnin tasapainoa. Mikäli menetelmää halutaan jatkaa flopille asti, täytyy nashin tasapaino ratkaista jo $45 \cdot 44 = 1980$ eri tilanteessa, ja pre-floppiin tultaessa ratkaistavia skenaarioita olisi $24 \cdot 435 \cdot 180$. Skenaarioiden määrä kasvaa valtavasti sitä mukaa, mitä pidemmälle takaperininduktioa kelataan, ja tämän vuoksi tässä työssä näytetään ainoastaan menetelmä, jolla yksittäinen turn-tilanne voidaan ratkaista, ja jätetään floppitilanteiden ratkaiseminen laajempiin tutkimuksiin. Seuraavaksi muodostetaan takaperininduktioa apuna käyttäen menetelmä, jolla voidaan ratkaista tasapainostrategiaa noudattava bluffin todennäköisyys turnilla, kun tiedetään panostuskoot turnilla ja riverillä.

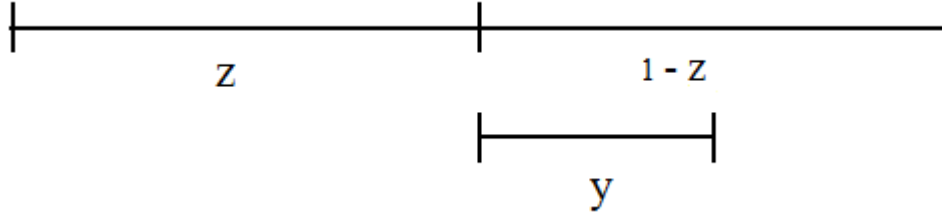
Ollaan kaksinpelitilanteessa turnilla, ja panostava pelaaja toimii ensin eli on OOP:ssa (out of position). Panostajan käsivalikoima on jälleen polarisoitu, ja viimeisenä vuotossa olevan pelaajan eli positiossa olevan pelaajan käsivalikoima sisältää ainoastaan bluff catchereita, jotka voittavat polarisoidun valikoiman heikot kädet ja häviävät vahvoille käsille. Oletetaan että boardi on siinä mielessä lukittu, että maksavan pelaajan kädet eivät koskaan mene riverillä panostavan pelaajan vahvoista käsistä ohi. Oletetaan myös osaksi samoista syistä, että maksava pelaaja ei koskaan korota turnia, vaan ainoastaan kippaa tai maksaa. Mikäli maksu tulee ja peli jatkuu riverille, kummallakin pelaajalla on riverillä pelimerkkejä sen verran vähän, että riverin panostus on aina all-in, jolloin ollaan esimerkkiä 2.6 vastaavassa tilanteessa. Mikäli OOP:ssa oleva pelaaja sököttää, hänellä on aina polarisoidun käsivalikoimansa heikkoihin käsiin kuuluva käsi, ja hän häviää potin. Ratkaistaan esimerkin 2.6 menetelmää ja takaperininduktiota käyttäen tasapainostrategiaa noudattava panostusfrekvenssi turnille, ja tämän pohjalta tasapainokäsivalikoima panostukselle turnilla.

Käydään ensin takaperininduktion periaatteen mukaisesti läpi skenaario, jossa peli jatkuu riverille, ja johon ratkaistiin tasapainokäsivalikoima panostavalle pelaajalle aiemmin esimerkissä 2.6. Merkitään b :llä bluffikäsiä osuutta panostavan pelaajan panostusvalikoimasta ja p_m :lla todennäköisyyttä, jolla vastustaja maksaa riverin Nashin tasapainopisteessä. Ratkaisuksi saatiin esimerkissä 2.6. arvot $b=1/3$ ja $p_m=1/2$, kun panostuskoko riverillä oli potin suuruinen all-in-panostus. Todennäköisyys, jolla panostavalla pelaajalla on riverille tultaessa jokin polarisoidun käsivalikoimansa vahva käsi on z , ja tämän suuruus määritetään alla turnin strategioita ratkaistaessa. Ratkaistaan näitä merkintöjä käyttäen odotusarvot kummankin pelaajan näkökulmasta sille skenaariolle, että peli jatkuu riverille, jonne tultaessa potin suuruus on $potti_r$. Panostavan pelaajan odotusarvo river-skenaariolle on EV^{PR} ja maksavan pelaajan odotusarvo river-skenaariolle on EV^{MR} :

$$EV^{PR} = \begin{cases} potti_r \cdot \left(z + \frac{zb}{1-b}\right), & z < 1 - b, \\ potti_r, & z \geq 1 - b. \end{cases} \quad (21)$$

$$EV^{MR} = \begin{cases} potti_r \cdot \left(1 - \left(z + \frac{zb}{1-b}\right)\right), & z < 1 - b, \\ 0, & z \geq 1 - b. \end{cases} \quad (22)$$

Kaavat tulevat helpommin ymmärrettäviksi, kun huomioidaan, että $z + zb/(1-b)$ on kokonaistodennäköisyys, jolla panostava pelaaja panostaa sekastrategioiden tapauksessa. Vahvoilla käsillä panostetaan aina ja sellainen on panostajalla todennäköisyydellä z . Bluffin osuus panostusvalikoimasta sekastrategioiden tapauksessa on b , ja se saadaan ratkaistua indifferenssiehtoa käyttäen kuhunkin tilanteeseen edellisen osion esimerkin menetelmällä. Panostuksen kokonaistodennäköisyydeksi tulee $z + y$, missä y on kokonaistodennäköisyys river-bluffille ja bluffien osuus kaikista panostuksista on $y/(z + y) = b$. Tästä voidaan ratkaista y :lle lauseke $zb/(1-b)$, jota on käytetty kaavoissa (21) ja (22). Vastaavasti $1 - (z + zb/(1-b))$ on todennäköisyys sökötykselle, jonka jälkeen positiossa oleva pelaaja eli turnilla maksun tehnyt pelaaja voittaa aina potin. Kuva 3 havainnollistaa mainittujen todennäköisyyksien ja käsivalikoimien keskinäisiä suhteita.



Kuva 3. Vahvojen käsien todennäköisyys riverille tultaessa on z ja sen komplementtiin $(1 - z)$ sisältyvät tilanteet y , joissa bluffataan riverillä. Panostuksen todennäköisyys on $z + y$.

Kirjoitetaan odotusarvoyhtälöt maksavalle pelaajalle turnilla. Kun panostus maksetaan, on turnin odotusarvo riverin odotusarvo, josta vähennetään maksun hinta. Maksuun tarvittavaa määrää kutsutaan termillä *Turnmaksu*. Kipin odotusarvo on 0:

$$EV_{\text{maksu}} = EV^{MR} - \text{Turnmaksu} = \text{potti}_r \cdot \left(1 - \left(z + \frac{zb}{1-b}\right)\right) - \text{Turnmaksu}. \quad (23)$$

$$EV_{\text{kippi}} = 0. \quad (24)$$

Indifferenssiehtojen mukaan tasapainopisteessä $EV_{\text{maksu}} = EV_{\text{kippi}}$, ja tätä ehtoa apuna käyttäen voidaan ratkaista z eri kokoisille turnin panostuksille ja riverin panostuksille. b riippuu riverin all-in panostuksen koon ja potin koon suhteesta, joten mikäli turnilla tiedetään efektiivisten stackien suhde turn-panostuksen kokoon ja lisäksi se, että river-panostus tulee aina olemaan all-in, voidaan yllä esitettyjen oletusten perusteella ratkaista z .

Kaavojen (23) ja (24) yhtäsuuruuden perusteella ratkaistun z :n avulla voidaan mainituilla oletuksilla laskea nyt myös tasapainostrategian mukainen todennäköisyys b_t sille, että lyödään turnilla bluffilyönti silloin, kun kädessä on jokin polarisoidun käsivalikoiman heikkoihin käsiin sisältyvä käsi. Jos arvolyöntikombinaatioilla lyödään turnilla aina ja bluffikäsikombinaatioilla todennäköisyydellä b_t , on käsivalikoimassa riverille tultaessa tällöin kaikki vahvat kädet muodostavat kombinaatiot ja heikot kädet muodostavat kombinaatiot kerrottuna b_t :llä. Vahvojen käsien osuus koko käsivalikoimasta on riverille tultaessa z , joten voidaan kirjoittaa

$$z = \frac{\text{vahvat kädet}}{\text{vahvat kädet} + b_t \cdot \text{heikot kädet}}, \quad (25)$$

ja tästä ratkaista b_t , joka on

$$b_t = \frac{\text{vahvat kädet} - z \cdot \text{vahvat kädet}}{z \cdot \text{heikot kädet}}, \quad (26)$$

kun kaavoissa vahvat kädet ja heikot kädet tarkoittavat kombinaatioiden lukumääriä. Jos oltaisiin esimerkiksi tilanteessa, jossa $z = 0.5$ ja turnille tultaessa puolet käsivalikoimasta olisi heikkoja käsiä ja puolet vahvoja käsiä, eli vahvoja käsiä muodostavia käsikombinaatioita olisi yhtä paljon kuin heikkoja käsiä muodostavia kombinaatioita, kaava (26) antaisi b_t :lle arvon 1. Lauseke river-bluffien todennäköisyydelle silloin, kun kädessä on heikko käsi, nähdään kuvasta 3 ja se on $b_r = y/(1 - z)$.

Taulukko 6. Bluffin todennäköisyys, kun kädessä on heikko käsi.

	Turn-bluffin todennäköisyys heikolla kädellä, b_t	River-bluffin todennäköisyys heikolla kädellä, b_r
Turn-panostus $\frac{1}{2}$ pottia ja river panostus $\frac{1}{2}$ pottia	0.7778	0.4286
Turn-panostus $\frac{1}{2}$ pottia ja river panostus potillinen	1	0.5

Seuraavaksi esitetään hieman numeerisia arvoja, joita on laskettu yllä esiteltyä menetelmää käyttäen. Yllä olevassa taulukossa 6 on tasapainostrategian mukainen bluffitodennäköisyys kahden eri panostuskoon tilanteessa silloin, kun kädessä on jokin polarisoidun käsivalikoiman heikko käsi. Taulukon ylempi tilanne on sellainen, jossa sekä turnilla että riverillä lyödään puolen potin suuruinen lyönti, ja riverin lyönti on all-in. Alemmassa tilanteessa lyödään turnilla puolen potin lyönti ja riverin lyönti on potin suuruinen all-in. Kummassakin tilanteessa oletetaan että turnille tultaessa panostavalla pelaajalla on yhtä paljon vahvoja käsiä kuin heikkoja käsiä.

Taulukon arvoista voidaan vetää joitakin yleisiä johtopäätöksiä. Kummassakin läpi käydyssä tilanteessa riverillä bluffataan tasapainoa noudattavassa strategiassa heikoilla käsillä selkeästi vähemmän kuin turnilla. Lisäksi panostuskoon nostaminen nostaa bluffin todennäköisyyttä silloin, kun kädessä on polarisoidun käsivalikoiman heikkoihin käsiin kuuluva käsi. Mielenkiintoista on myös, että kun panostuskokoa nostetaan ainoastaan riverillä, kasvaa bluffin todennäköisyys selkeästi eniten turnilla. Tämä johtuu osaksi siitä, että turnilla on lyötävä enemmän bluffeja, jotta heikkoja käsiä voidaan sisällyttää riittävä määrä riverin bluffivalikoimaan.

2.6. Potti-Omahan 4-betatut ässät

Yksi olennainen Potti-Omahan (PLO) ero NL Hold’emiin verrattuna on se, että maksimipanostuksen suuruus on PLO:ssa aina potin suuruinen. Tästä johtuen all-in –tilanteet ovat PLO:ssa paljon harvinaisempia kuin NL Hold’emissa, ja niitä on mahdollista pre-flopissa tehdä vain jos usean potin suuruisen korotuksen ja vastakorotuksen jälkeen päädytään all-iniin. Tämän takia osiossa 2.5.5. esitetty malli Nashin tasapainojen arvioinnille all-in –tilanteissa ei ole PLO:ssa toimiva. Toinen syy miksi PLO:ssa on kyseisellä menetelmällä vaikea etsiä arvioita tasapainoa noudattaville strategioille on valtava käsikombinaatioiden määrä. Jos esimerkiksi all-in –panostusvalikoimia etsitään yhden prosenttiyksikön välein pelin parhaista aloituskäsistä, jää kunkin prosenttiyksikön väliin käsikombinaatioita yli 1700, joka on enemmän kuin NL Hold’emissa on kaikkia aloituskäsikombinaatioita yhteensä. Koska pre-flopin tasapainomallin muodostaminen osoittautuu yllä esitetyillä menetelmillä PLO:ssa liian kunnianhimoiseksi, käydään seuraavaksi läpi eräs tilanne, joka ilmenee vasta flopin jälkeen.

Potti-Omahan pelaajien keskuudessa on aina silloin käyty keskustelua siitä, kuinka suuri osa pelimerkkipinosta on saatava pre-flopissa sisään, jotta kaksi ässää sisältävä käsi kannattaa 4-

betata ja flopin jälkeen mennä all-in mihin tahansa boardiin. Koska maksimikorotus on potin suuruinen, vaikuttaa mainittuun 4-betin maksimikoon ja stackin keskinäiseen suhteeseen potin koko, joka muodostuu aikaisemmista korotuksista. Jos esimerkiksi kaksinpelitilanteessa 100bb:n stackeilla (SB vs. BB) SB korottaa 3bb:een, ja BB 3-bettaa 9bb:een, on SB:n mahdollista 4-betata 27bb:een, joka on $27bb/100bb = 0.27$ stackista. Potin suuruinen maksimikorotus lasketaan siten, että ensin asetetaan SB:n stackista pottiin määrä, joka tarvittaisiin 3-betin maksuun eli $9bb - 3bb = 6bb$, ja tämän jälkeen lasketaan potin koko ja lisätään SB:n stackista korotukseen vielä sen verran eli $9bb + 9bb$. Tällöin kun summataan alkuperäinen korotus 3bb, maksuun vaadittava erotus 6bb ja sen jälkeinen potin koko 18bb, saadaan 27bb. Kaksinpelitilanteessa jossa ollaan preflopissa eikä potissa ole vielä mitään aiempien panostuskierrosten panostuksia, voidaan potin suuruinen korotus laskea helposti, koska se on aina kolminkertainen edelliseen panostukseen nähden.

Kysymyksenasettelussa usein oletetaan, ettei pelaaja 4-bettaa juurikaan muita käsiään kuin ässät, jolloin hän tulee paljastaneeksi 4-bet-valikoimansa, joka on pelkästään ässäparit sisällään pitävä käsivalikoima eli $\{AAxx\}$. Tällöin vastustaja voi pelata eksplotiivisesti ja tehdä oikeita kipejä ja maksuja kyseistä kapeaa 4-bet-valikoimaa vastaan. Pokerikirjallisuudessa on annettu paljon erilaisia ja toisistaan hyvinkin paljon poikkeavia arvioita siitä, kuinka suuri osa pelimerkkipinosta on PLO:ssa saatava sisään ennen floppia, jotta paljastetut ässät voidaan pelata voitollisesti. Lyle Berman kirjoittaa, että ässäparilla ”kannattaa vain maksaa, paitsi jos saat laitettua vähintään kolme neljänestä rahoistasi pottiin jo ennen floppia” [16]. Rolf Slotboom sen sijaan arvioi että vastustaja voi maksaa paljastettuja ässiä vastaan vain noin 25% stackista pre-flopissa positiivisella odotusarvolla [17]. Tässä osiossa tarkastellaan laskennallisesti tätä mielenkiintoista tilannetta, ja selvitetään tietyin oletuksin, kuinka suuri osa stackista paljastettuja 4-betattuja ässiä vastaan voidaan maksaa pre-flopissa.

Oletetaan, että 3-bettaaja maksaa koko käsivalikoimallaan 4-betin, koska tietää 4-bettaajalla olevan ässät ja tietää myös pystyvänsä tekemään hyviä päätöksiä vastustajan paljastettua käsivalikoimaa vastaan. Lisäksi oletetaan, että 3-bettaajalla on käsivalikoimassaan ainoastaan paritutumattomia rundown-käsiä, joissa ei ole ässää, ja tällaista käsivalikoimaa merkitään jatkossa laittamalla käsivalikoiman perään merkintä *. Esimerkiksi $10\%*$ tarkoittaa parhaita 10 prosenttia aloituskäsisistä, joista on poistettu parit ja yhden ässän sisältävät kädet. Parit ja ässän sisältävät kädet pelaavat huonosti ässiparia vastaan ja ne usein kipattaisiin 4-bettiin tilanteessa, jossa tiedetään vastustajalla olevan ässäpari. Tässä kohdin malli suosii selvästi 3-bettaajaa, koska malli ei huomioi tilanteita, joissa 3-bettaus ollaan tehty huonosti ässiparia vastaan pelaavalla kädellä. Näissä tilanteissa 4-bettaaja voittaa potin suoraan, kun 3-bettaaja kippaa. Tähän palataan myöhemmin. Oletetaan myös, että 4-betin maksaja on aina positiossa ja 4-bettaaja lyö aina flopilla maksimikorotuksen eikä kippaa mihinkään vastakorotuksiin, jolloin flopin jatkolyöntiä voidaan käsitellä odotusarvon kannalta all-in –lyöntinä.

Kun 4-betin pre-flopissa tehnyt panostaja menee all-in flopilla, täytyy vastustajalla olla equityä E vähintään määrä $e = \text{stack}/(\text{potti} + 2 \cdot \text{stack})$, jotta hän voi maksaa panostuksen. OddsOracle-ohjelmiston simulaatioilla selvitettiin erilaisille vastustajan käsivalikoimille todennäköisyys p , jolla tämä toteutuu. p voidaan siis kirjoittaa muotoon $p(E \geq \text{stack}/(\text{potti} + 2 \cdot \text{stack}))$ ja se on todennäköisyys, jolla equity flopilla on ässiä vastaan

suurempi tai yhtä suuri kuin $\text{stack}/(\text{potti}+2 \cdot \text{stack})$. Taulukossa 7 on eri $p:n$ arvoja, jotka muuttuvat potin suuruuden ja maksajan käsivalikoimien mukaan.

Lisäksi samalla OddsOracle-ohjelmistolla selvitettiin simulaatioihin pohjautuen, kuinka suuri maksajan equity itsessään on keskimäärin ässiä vastaan silloin, kun se on suurempi tai yhtä suuri kuin $\text{stack}/(\text{potti}+2 \cdot \text{stack})$ ja tätä merkitään kirjaimella E_{avg} . Taulukossa 8 on eri $E_{\text{avg}}:n$ arvoja, jotka muuttuvat potin suuruuden ja maksajan käsivalikoimien mukaan.

Kun panostaja menee all-in flopilta, hänen odotusarvonsa on

$$EV^{\text{panostaja}} = p[(1 - E_{\text{avg}}) \cdot (\text{potti} + \text{stack}) - E_{\text{avg}} \cdot \text{stack}] + (1 - p) \cdot \text{potti}. \quad (27)$$

Maksajan odotusarvo flopin all-in-panostuksen tullessa on

$$EV^{\text{maksaja}} = p[E_{\text{avg}}(\text{potti} + \text{stack}) - (1 - E_{\text{avg}}) \cdot \text{stack}]. \quad (28)$$

Simulaatiopisteiden laskeminen oli kohtuullisen raskasta ja OddsOracle asetettiin käyttämään laskenta-aikaa kuhunkin taulukon 7 simulaatioon 20 sekuntia ja kuhunkin taulukon 8 simulaatioon 40 sekuntia, ellei $1.5 \cdot 10^6$ simulaatiokierrosta ehditty käydä sitä ennen läpi. Suuresta laskenta-ajasta huolimatta kummankin taulukon tulosten virhemarginaali on vähintäänkin noin 2-3 prosenttiyksikköä.

Taulukko 7. Todennäköisyydet, joilla maksajan equity flopilla on suurempi kuin maksuun tarvittava $e = \text{stack}/(\text{potti}+2 \cdot \text{stack})$. Riveillä 4-betin suhde stackiin jaon alussa pre-flopissa ja sarakkeissa maksajan käsivalikoimat.

	5%*	10%*	15%*	20%*	25%*	30%*
0.25	57.3	58.0	55	56.7	54.1	52.1
0.35	64.2	62.2	63.8	62.1	59.2	62.6
0.45	71.0	74.2	69.6	65.9	68.6	69.3
0.55	75.4	74.6	73.8	71.2	74.2	68.4
0.65	78.6	78.3	77.9	80.2	78.1	78.4
0.75	86.3	87.4	90.9	89.2	83.1	86.5

Taulukko 8. Maksajan keskimääräinen equity flopilla, kun se on suurempi kuin e . Riveillä 4-betin suhde stackiin jaon alussa pre-flopissa ja sarakkeissa maksajan käsivalikoimat.

	5%*	10%*	15%*	20%*	25%*	30%*
0.25	57.8	61.5	56.8	55.1	56.2	60.0
0.35	56.5	53.8	55.0	54.0	56.2	57.4
0.45	53.9	51.3	53.4	51.5	51.7	51.7
0.55	57.0	47.5	49.2	49.4	50	47.6
0.65	47.3	50	48.7	47	49	52.3
0.75	48.4	44.8	45.4	43.2	45.8	46.6

Taulukko 9. Kussakin alkiossa panostajan odotusarvo ylhäällä ja maksajan odotusarvo alhaalla. Riveillä 4-betin osuus stackista jaon alussa pre-flopissa ja sarakkeissa maksajan kävivalikoimat.

	5%*	10%*	15%*	20%*	25%*	30%*
0.25	26.74 23.26	22.16 27.84	28.77 21.23	30.04 19.96	29.77 20.23	26.56 23.45
0.35	39.18 30.82	43.50 26.50	41.29 28.71	43.30 26.70	41.94 28.06	38.83 31.17
0.45	52.51 37.49	54.68 35.32	53.95 36.05	58.37 31.63	56.80 33.20	56.46 33.54
0.55	57.98 52.03	72.70 37.30	70.59 39.41	71.69 38.31	69.19 40.81	75.66 34.34
0.65	83.15 46.85	79.11 50.90	81.39 48.61	82.68 47.32	80.80 49.20	75.43 54.57
0.75	88.04 61.96	93.54 56.46	90.19 59.81	95.23 54.77	94.66 55.34	91.01 58.99

Taulukoiden 7 ja 8 simulaatiopisteiden avulla laskettiin MATLAB 7.1. –ohjelmistolla kaavojen (27) ja (28) antamat odotusarvot taulukkoon 9. Taulukosta nähdään, että tarkasteltavassa tilanteessa panostajan odotusarvo on maksajan odotusarvoa suurempi kaikkia valittuja maksajan käsivalikoimia vastaan aina silloin, kun pre-flopissa ollaan saatu panostettua 4-betillä 0.35 stackista tai enemmän.

Kuten yllä on todettu, mallin tulokset suosivat selkeästi maksavaa osapuolta, koska se ei huomioi tilanteita, joissa 3-bettaaja joutuu kippaamaan parin tai yhden ässän käsiä sisältävän käsivalikoiman kuten {KKxx}:n, jolloin 4-bettaaja voittaa potin suoraan. Malli olettaa että 3-bettaajalla on aina kädessään valikoima, jossa ei ole pareja eikä dominoituja ässiä sisältäviä käsijoukkoja {Axxx}, ja tämän takia maksaa aina 4-betin.

Lisäksi malli olettaa, että maksava osapuoli pelaa flopin jälkeen aina oikein; maksava osapuoli maksaa vain, jos hänellä on maksuun tarvittava equity ja kippaa muulloin. Todellisuudessa rationaalinenkin maksava osapuoli tekee paljon virheitä flopin jälkeen, vaikka tietäkin vastustajan käsivalikoiman olevan {AAxx}. Tämä johtuu siitä, että maksaja ei tiedä kahta muuta korttia, jotka panostajalla on kädessään. Jos esimerkiksi floppiin tulee **8-7-6**, ja maksajalla on kädessään 9875, hän maksaa ymmärrettävästi aina, koska equity ässäpareja vastaan on erittäin korkea, mutta aina joskus kohtaa käden AAT9, jolla on ässäparin kahden apukortin ansiosta kympin korkuinen suora, ja maksajan equity onkin nyt arviosta poiketen hyvin alhainen.

Koska malli suosii yllä mainituilla tavoilla maksavaa osapuolta, ja panostajan odotusarvo on silti korkeampi kuin maksajan odotusarvo kaikkia valittuja käsivalikoimia vastaan, kun pre-flopissa ollaan panostettu 0.35 stackista tai enemmän, voidaan perustellusti sanoa, että osuus 0.35 stackista on näiden tulosten valossa yläraja, jota ei ainakaan kaksinpelitilanteessa tarvitse ylittää, jotta 4-bettaaminen on selkeästi kannattavaa. Ylärajaksi saattaa todellisuudessa riittää hyvinkin Rolf Slotboomin mainitsema 25% stackista, koska odotusarvotaulukon ylimmälläkin sarakkeella panostajan odotusarvot ovat suurimmaksi osaksi selkeästi paremmat kuin maksajan

odotusarvot. Maksajan odotusarvo on taulukossa ylimmällä rivillä parempi ainoastaan, kun maksetaan käsivalikoimalla 10%*, ja tämä yksittäinen tulos on todennäköisesti epätarkka simulaatioiden virhemarginaalin takia. Joka tapauksessa Lyle Bermanin arvio siitä, ettei ässiä kannattaisi korottaa ellei saada 3/4 stackista pottiin ennen floppia, voidaan nykyaikaisten simulaatio- ja laskentamenetelmien antamien tulosten valossa unohtaa.

Tarkastellaan vielä työn aiheen mukaisesti odotusarvotaulukosta Nashin tasapainoa. Tulos on tässä tapauksessa melko intuitiivinen: panostaja pyrkii saamaan kutakin vastassa olevaa käsivalikoimaa vastaan mahdollisimman suuren osuuden stackistaan pottiin ennen floppia, jos oletuksena on, että jäljelle jäävä osuus pelimerkeistä panostetaan flopin jälkeen mihin tahansa boardiin. Tämän takia panostajan odotusarvomaksimit kussakin sarakkeessa löytyvät taulukon alimmalta riviltä. Maksajan odotusarvomaksimit kullakin rivillä vaikuttavat olevan suurimmaksi osaksi taulukon vasemmassa laidassa eli niihin päästään pelattaessa mahdollisimman kapealla käsivalikoimalla. Tämän taulukon rajallisessa kehikossa Nashin tasapaino siis löytyy, kun panostaja panostaa 75% stackistaan ja maksaja maksaa pelin parhailla 5% alotuskäsistä, joista on karsittu parit ja ässiä sisältävät kädet pois.

3. Tulokset

Toisen luvun osiossa 2.5.5. esiteltiin menetelmiä, joilla lasketaan Nashin tasapainoa noudattavia strategioita joihinkin tyypillisiin No Limit Texas Hold’emin all-in-tilanteisiin. Tässä luvussa on eritelty ja analysoitu kyseisillä menetelmillä saatuja tuloksia tilannekohtaisesti. Seuraavaksi käydään läpi pre-flopin tuloksia, jotka saatiin simulaatioon ja kaavoihin (17) ja (18) pohjautuvalla menetelmällä, joka selitettiin edellisessä luvussa osiossa 2.5.5.

3.1. Pre-flop-all-in –tilanteiden tulokset

3.1.1. 5bet-all-in No Limit Hold’emissa kaksinpelitalanteessa

Kaksinpelissä 5-bet-all-in –tilanne syntyy siten, että ensin SB korottaa, BB 3-bettaa, SB 4-bettaa ja lopuksi BB panostaa all-in tehdessään 5-betin. Muuttujat jotka tässä tilanteessa vaihtelevat, ovat käsivalikoimat joilla panostukset tehdään ja panostusten koot. Näitä tuloksia laskettaessa panostuksille on valittu koot, jotka ovat hyvin yleiset nykypeleissä: 3-betin kooksi on valittu 9bb, 4-betin kooksi 23bb ja 5-betin kooksi all-in. Viime vuosina myös 5-bet minimipanostuskooalla on yleistynyt. 4-betin ja sitä edeltävien panostusten panostuskoot eivät todennäköisesti ole aivan optimaaliset, mutta eivät myöskään kovin kaukana siitä. Valittuja panoskokoja käyttäen etsitään tasapainokäsivalikoimat.

Ensimmäisessä tapauksessa tasapainokäsivalikoima määritetään tiukkaa korottajaa vastaan tilanteessa, jossa vastustaja korottaa SB:ltä joka toisen käden ja itse 3-betataan parhaat 10% aloituskäsistä sisältävällä käsivalikoimalla. Tämän jälkeen vastustaja 4-bettaa parhaat 5% aloituskäsistään, ja tarkoitus on etsiä Nashin tasapainoa noudattava 5-bet-all-in-käsivalikoima.

Taulukko 10. Equitytaulukko, jossa on ylimmän rivin käsivalikoimien equityt prosentteina vasemmanpuoleisimman sarakkeen käsivalikoimia vastaan.

	2.2%	2.6%	3%	3.3%	4.2%	4.5%
2.2%	50	48.9	43.6	43	41.8	41.2
2.6%	51.1	50	45.2	44.4	43.1	42.3
3%	56.4	54.8	50	49	46.9	46.2
3.3%	57	55.6	51	50	48.3	47.3
4.2%	58.2	56.9	53.1	51.7	50	49
4.5%	58.8	57.6	53.8	52.6	51	50

Taulukko 11. Kussakin alkiossa all-in-panostajan odotusarvo yläpuolella ja maksajan odotusarvo alapuolella.

	2.2%	2.6%	3%	3.3%	4.2%	4.5%
2.2%	4.81 10.12	4.66 10.82	5.96 6.12	5.73 5.94	5.82 5.54	5.97 4.86
2.6%	5.44 11.09	5.21 11.96	6.23 8.04	6.30 7.79	6.31 7.73	6.54 6.84
3%	4.87 15.75	4.51 16.95	5.46 13.8	5.44 13.86	5.37 14.11	5.44 13.86
3.3%	5.19 16.28	4.69 17.784	5.61 15.00	5.55 15.18	5.13 16.46	5.33 15.84
4.2%	6.16 17.34	5.40 19.14	6.08 17.52	6.12 17.42	5.33 19.32	5.50 18.90
4.5%	6.36 17.86	5.46 19.86	6.14 18.36	6.02 18.61	4.95 21.00	5.09 20.70

Simuloidaan aluksi edellisen luvun menetelmän mukaisesti equityt tilanteille, joissa kärkiprosentteja aloituskäsistä sisältävät kädet menevät toisiaan vastaan all-in pre-flopissa. Equityt näkyvät taulukossa 10. Taulukon 10 equityistä lasketaan molempien pelaajien odotusarvot vastaavissa simulaatiopisteissä kaavoilla (17) ja (18), ja kyseiset odotusarvot ovat taulukossa 11, josta alleviivataan matriisipelin ratkaisumenetelmää käyttäen maksajan suurin odotusarvo kustakin riviltä ja panostajan suurin odotusarvo kustakin sarakkeesta.

Taulukosta 11 ei nyt löydy suoraan Nashin tasapainoa, mutta siitä nähdään, että maksimiodotusarvojen funktiot leikkaavat, kun panostajan käsivalikoima on välillä 3.3-4.2% aloituskäsistä ja maksajan käsivalikoima on välillä 2.6-3% aloituskäsistä. Tätä väliä tarkasteltiin tarkemmin käsikombinaatio kerrallaan ja Nashin tasapainolle saatiin arvio. Tulokseksi saatiin alla olevat strategiat.

Panostaja panostaa käsivalikoimalla {99+,AQs+,AKo}, joka on parhaat 4.2% pelin aloituskäsistä.

Vastustaja maksaa käsivalikoimalla {TT+,AKs,(1/6)99}, joka on parhaat 2.667% pelin aloituskäsistä.

Tulos on panostajan osalta hyvin tyypillinen kaksinpelissä käytetty 5-bet-all-in – panostusvalikoima nykypeleissä internetissä tiukkaa ja aggressiivista vastustajaa vastaan. Pelaajat ovat ilmeisesti intuitiivisesti varsin lähellä tätä Nashin tasapainoa noudattavaa panostusvalikoimaa, vaikka sitä eivät useimmat pelaajat ole teorian mukaisesti laskeneet.

Maksajan osalta tulos on sikäli yllättävä, että AKo-käsiä ei ole päätynyt maksuvalikoimaan, vaikka kyseiset kädet blokkaavat useita panostajan vahvoja käsiä, ja AKo:n equityn olettaisi myös olevan riittävä panostajan useimpia käsiä vastaan. Tulos voi selittyä sillä, että käytetyssä yksinkertaistavassa menetelmässä käsivalikoimia aletaan laajentaa parhaista aloituskäsistä huonompiin, vaikka joillakin huonommilla käsillä voisi blokkeriarvonsa takia olla maksuvalikoimassa odotusarvoa nostava vaikutus useimpia käsivalikoimia vastaan. Tämän vuoksi tällainen huonompi käsi voisi sisältyä tasapainoa noudattavaan strategiaan, vaikka jotkut paremmat kädet siihen eivät kuuluisikaan. Käytetty menetelmä ei siis ota huomioon tilanteita, joissa esimerkiksi parhaat 2% aloituskäsistä ja jokin käsi väliltä 4-5% muodostaisivat panostusvalikoiman, vaan käsivalikoimaa laajennetaan kombinaatio kerrallaan parhaista käsistä huonompiin.

Tarkastellaan vertailun vuoksi toista 5-bet-all-in –tilannetta, jossa pelaajat pelaavat yliaggressiivisesti ja korottavat laajemmilla käsivalikoimilla. Tarkasteltavassa tilanteessa SB korottaa 50% ajasta, ja 3-bettaus tehdään BB:ltä 40% ajasta, ja SB tekee 4-betin 30% ajasta. Lasketaan yllä käytettyä menetelmää noudattaen Nashin tasapainoa noudattava 5-bet-all-in – panostusvalikoima BB:lle ja maksuvalikoima SB:lle. Tilanteesta tehtiin jälleen simulaatioilla laaja taulukon 10 kaltainen equitytaulukko, jonka avulla kaavoja (17) ja (18) käyttäen muodostettiin odotusarvotaulukko, joka on nähtävillä taulukossa 12.

Taulukko 12. Panostajan odotusarvot yllä ja maksajan odotusarvot alla.

	10%	12%	14%	16%	18%	20%	22%	24%	26%	28%
12%	6.86 9.13	6.84 9.20	6.856 9.15	6.912 8.96	7.08 8.40	7.2 8.00	7.268 7.77	7.44 7.20	7.624 6.59	7.808 5.97
14%	7.63 10.20	7.504 10.56	7.44 10.73	7.43 10.77	7.546 10.44	7.653 10.13	7.607 10.27	7.78 9.76	7.92 9.36	8.13 8.77
16%	8.4 11.00	8.128 11.68	7.984 12.04	7.893 12.67	8.00 12.00	8.053 11.87	7.93 12.17	8.064 11.84	8.155 11.61	8.395 11.01
18%	9.03 11.93	8.64 12.80	8.39 13.35	8.16 13.87	8.19 13.80	8.22 13.73	7.998 14.23	8.136 13.92	8.16 13.87	8.352 13.44
20%	9.73 12.53	9.2 13.60	8.81 14.37	8.848 15.04	8.38 15.24	8.33 15.33	8.01 15.99	8.08 15.84	8.03 15.95	8.35 15.31
22%	10.49 12.93	9.81 14.16	9.39 14.93	8.98 15.68	8.82 15.96	8.73 16.13	8.32 16.87	8.36 16.80	8.26 16.99	8.36 16.80
24%	11.12 13.47	10.27 14.88	9.736 15.77	9.216 16.64	8.904 17.16	8.72 17.47	8.20 18.33	8.16 18.40	7.97 18.72	8.112 18.48
26%	11.79 13.87	10.82 15.36	10.12 16.43	9.50 17.39	9.10 18.00	8.84 18.40	8.21 19.36	8.112 19.52	7.84 19.93	7.91 19.82
28%	12.41 14.27	11.31 15.84	10.44 17.08	9.63 18.24	9.13 18.96	8.77 19.47	8.03 20.53	7.73 20.96	7.35 21.49	7.37 21.47
30%	13.10 14.53	11.82 16.24	10.84 17.55	9.92 18.77	9.24 19.68	8.80 20.27	7.94 21.41	7.68 21.76	7.10 22.53	7.06 22.59

Taulukosta 12 nähdään että Nashin tasapaino toteutuu seuraavilla panostus- ja maksuvalikoimilla:

Panostaja panostaa käsivalikoimalla {66+,A3s+,K7s+,Q8s+,J9s+,T9s,A8o+,KTo+,QTo+,JTo}, joka on parhaat 22% pelin aloituskäsistä.

Vastustaja maksaa käsivalikoimalla {55+,A2s+,K6s+,Q8s+,J8s+,T8s+,A7o+,K9o+,Q9o+,JTo}, joka on parhaat 26% pelin aloituskäsistä.

3.1.2. 3-bet-all-in No Limit Hold’emissa kaksinpelitilanteessa

3-bet-all-in –tilanne muodostuu siten, että jokin pelaaja korottaa, ja toinen pelaaja korottaa tähän päälle suoraan all-in –lyönnin. Tällaisen tilanteen syntyminen tarkoittaa yleensä sitä, että stackit ovat huomattavasti pienemmät kuin edellisen osion 3.1.1. tapauksissa, koska uudelleenkorotus on suoraan all-in, eikä tilanne jatku 4-bet- ja 5-bet-skenaarioihin. 3-bet-all-in tilanteet ovat erittäin yleisiä esimerkiksi turnauspokerissa. Tässä osiossa tarkastellaan kahta erilaista 3-bet-all-in –tilannetta kolmen pelaajan pöydässä, jossa pelaajien efektiiviset pelimerkkipinot ovat 15bb.

Ensin tarkasteltavassa tilanteessa button korottaa parhaat 10% aloituskäsistään ja korotuksen suuruus on 2.5bb. Lasketaan millä käsivalikoimalla BB:n on panostettava all-in, jotta käsivalikoima noudattaa Nashin tasapainon mukaista strategiaa, kun SB kippaa välistä. Tilanteesta tehtiin jälleen simulaatioilla laaja taulukon 10 kaltainen equitytaulukko ja tämän pohjalta muodostettiin taulukon 12 kaltainen odotusarvotaulukko, jonka perusteella määritettiin Nashin tasapainon toteutuvan kun panostaja panostusvalikoima on välillä 7.09%-8.30% parhaista aloituskäsistä ja maksajan maksuvalikoima on välillä 5.28-6.49% parhaista aloituskäsistä. Näiden lukujen väliltä simuloitiin vielä uusia tarkempia simulaatiopisteitä, ja niiden pohjalta laskettiin odotusarvot kyseiseltä väliltä ja ne ovat näkyvillä taulukossa 13, josta voidaan määrittää Nashin tasapaino. Nashin tasapaino toteutuu seuraavilla käsivalikoimilla:

Panostaja panostaa käsivalikoimalla {88+,ATs+,KTs+,AQo+}, joka on parhaat 7.09% pelin aloituskäsistä.

Maksaja maksaa käsivalikoimalla {88+,ATs+,KQs,AQo+}, joka on parhaat 6.49% pelin aloituskäsistä.

Tuloksena on melko tiukka panostusvalikoima BB:lle ja maksuvalikoima buttonille. Vaikka riskeerattavana olevien pelimerkkien määrän suhde voitettavana olevaan pottiin on samaa suuruusluokkaa kuin esimerkissä 2.5, ovat tasapainokäsivalikoimat siitä huolimatta selkeästi erilaiset. Tämä johtuu tiukasta käsivalikoimasta, jolla ensimmäinen panostus tehdään. Kun BB tekee päätöksensä panostaa 3-bet-all-in tai kipata, hänellä on päätöshetkellä vastassa parhaat 10% pelin aloituskäsistä, joilla button on lähtenyt kyseisessä tilanteessa peliin mukaan. On siis hyvin tärkeää huomioida mistä positioista avaus on tullut ja minkälaisella käsivalikoimalla. Tätä havainnollistetaan vielä seuraavalla tuloksella, joka on laskettu 3-bet-all-in- tilanteessa, kun avaus on tullut buttonilta ja käsivalikoima on laajempi.

Taulukko 13. Panostajan odotusarvot alkiodien yläriveillä ja maksajan odotusarvot alariveillä. Vasemmanpuoleisessa sarakkeessa panostajan strategiavaihtoehdot ja ylärivillä maksajan.

	5.28%	5.58%	6.49%
7.09%	0.1418 2.000	0.1434 1.977	<u>0.1388</u> 2.042
7.39%	0.1419 2.080	0.1432 2.062	0.1359 2.161
8.30%	<u>0.1425</u> 2.283	<u>0.1439</u> 2.266	0.1296 2.438

Tarkastellaan vertailun vuoksi tilannetta, jossa kolmen hengen pöydässä button korottaa 2.5bb:een aina kun hänellä on käsi joka sisältyy parhaaseen 40%:een pelin aloituskäsistä ja kippaa muulloin. Tämä on käytännössä paljon yleisempi korotusvalikoima kuin aiemmin tarkasteltu parhaat 10% aloituskäsistä. SB kippaa, ja lasketaan millä panostusvalikoimalla BB:n on panostettava all-in, jotta strategia noudattaisi Nashin tasapainoa. Stackit ovat 15bb ja oletetaan jälleen, että BB:n vaihtoehdot ovat ainoastaan joko panostaa all-in tai kipata.

Tilanteesta tehtiin jälleen simulaatioilla laaja taulukon 10 kaltainen equitytaulukko ja tämän pohjalta muodostettiin taulukon 12 kaltainen odotusarvotaulukko. Sen perusteella määritettiin Nashin tasapainon toteutuvan kun panostajan panostusvalikoima on välillä 26.55%-28.36% parhaista aloituskäsistä ja maksajan maksuvalikoima on välillä 24.28-26.55% parhaista aloituskäsistä. Näiden lukujen väliltä simuloitiin vielä uusia tarkempia simulaatiopisteitä equityjen arvoille, ja niiden pohjalta laskettiin odotusarvot kyseiseltä väliltä kaavoilla (17) ja (18) ja ne ovat näkyvillä taulukossa 14, josta voidaan määrittää Nashin tasapainolle arvio. Nashin tasapainoksi arvioitu strategia toteutuu seuraavilla käsivalikoimilla:

Panostaja panostaa käsivalikoimalla {55+,A2s+,K5s+,Q8s+,J8s+,T8s+,98s,A7o+,K9o+,Q9o+,JTo}, joka on parhaat 27.15% pelin aloituskäsistä.

Maksaja maksaa käsivalikoimalla {55+,A2s+,K6s+,Q8s+,J8s+,T8s+,A7o+,K9o+,QTo+,JTo}, joka on parhaat 25.64% pelin aloituskäsistä.

Taulukko 14. Odotusarvot maksajalle ja panostajalle.

	24.28%	25.19%	25.64%	26.55%
26.55%	0.5839 1.801	<u>0.5757</u> 1.832	0.5696 1.855	<u>0.5874</u> 1.789
26.85%	0.5831 1.829	0.5745 1.861	0.5687 1.882	0.5861 1.817
27.15%	<u>0.5845</u> 1.849	0.5756 1.882	<u>0.5696</u> 1.931	0.5871 1.839
27.45%	0.5834 1.875	0.5741 1.909	0.5680 1.931	0.5856 1.867
28.36%	0.5786 1.960	0.5681 1.997	0.5613 2.021	0.5780 1.962

3.1.3. Yhteenveto No Limit Hold’emin preflop-all-in –tuloksista

Tasapainoa noudattavan all-in-panostusvalikoiman suuruuteen vaikuttaa suuresti stackin suhde pottiin, eli se kuinka paljon riskeerataan suhteessa voitettavissa olevaan pottiin. Tälle suurelle käytetään jatkossa pokerikirjallisuudesta tuttua lyhennettä *SPR* (Stack to Pot Ratio) [18].

Tämän luvun NL Hold’emin pre-flop-all-in -panostuksia koskevat tulokset on koottu taulukkoon 15, jossa on lisäksi myös alimmalla rivillä esimerkin 2.5 tulos, joka on saatujen tulosten kanssa vertailukelpoinen, ja jossa laskettiin tasapainoa noudattava all-in-panostusvalikoima BB:tä vastaan kaksinpelitilanteessa. Taulukkoon on koottu eri tilanteet ja kyseisten tilanteiden *SPR*:t, toiseksi viimeisen korotuksen käsivalikoima ja viimeisen Nashin tasapainoa (NE) noudattavan all-in panostuksen käsivalikoima. Lisäksi on laskettu viimeisen ja toiseksi viimeisen korotuksen keskinäinen suhde.

Pokerinpelaaja pystyy harvoin pelitilanteessa tekemään kovin tarkkoja matemaattisia laskelmia, koska kullekin päätökselle on mietintäaikaa vain noin parikymmentä sekuntia. Tämän takia pelitilanteissa ympäröivät nyrkkisäännötkin voivat olla hyödyllisiä, ja joitakin sellaisia voidaan taulukon 15 tulosten perusteella muodostaa. Jos tarkastellaan esimerkiksi 3-bet-all-in-tilanteita, voidaan todeta että samalla *SPR*:llä viimeisen korotuksen ja toiseksi viimeisen korotuksen keskinäinen suhde pysyy kutakuinkin 0.7:ssä, vaikka toiseksi viimeisen korotuksen käsivalikoimaa muutetaan merkittävästi. Kohtuullisen pätevä nyrkkisääntö tällaisiin tilanteisiin on, että kun *SPR*:n ollessa 3.5 vastustaja korottaa käsivalikoimalla x , korotetaan itse all-in käsivalikoimalla $0.7 \cdot x$, mikäli halutaan puolustautua eksplotiivisia strategioita vastaan. Kerrointa käsivalikoiman x edessä nostetaan, kun *SPR* pienenee ja lasketaan, kun *SPR* suurenee, ja se saa tyypillisesti arvoja väliltä [0.5,0.9]. Lisäksi kerroin on sitä pienempi, mitä laajempi on toiseksi viimeisen korotuksen käsivalikoima, mutta tämä ei vaikuta tarkastellulla välillä yhtä paljon kuin *SPR*:n muutokset.

Taulukko 15. Nashin tasapainoa noudattavan all-in panostuksen suhde toiseksi viimeiseen korotukseen eri tilanteissa.

Tilanne	SPR	Toiseksi viimeisen korotuksen valikoima	Viimeisen korotuksen valikoima (NE)	Edellisten keskinäinen suhde
Tyypillinen 5-bet-all-in	2.84	5%	4.2%	0.84
5-bet-all-in vs. laaja valikoima	2.84	30%	22%	0.73
3-bet-all-in vs. kapea valikoima	3.5	10%	7.09%	0.709
3-bet-all-in vs. laaja valikoima	3.5	40%	27.15%	0.6787
Pre-flop-all-in 10bb:llä	6.33	100% ("korotus" on tässä tapauksessa bb)	55%	0.55

4. Pohdintoja

4.1. Tilanteet joissa tasapainoa noudattava käsivalikoima ei maksimoi odotusarvoa

Kuten yllä on todettu, odotusarvot maksimoituvat käsivalikoimien tasapainotilanteessa silloin, kun kaksinpelissä molemmat pelaajat tietävät toistensa strategiat ja pelaavat parhaalla mahdollisella tavalla toistensa strategioita vastaan. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että tasapainokäsivalikoimat toimivat parhaiten hyviä pelaajia vastaan sellaisissa valikoiduissa tilanteissa, joista sekä pelaajalla itsellään että vastustajalla on pitkä pelihistoria. Tasapainokäsivalikoimien muodostaminen ei todennäköisesti käytännön pelitilanteessa ole kannattavaa jos toinen seuraavista kohdista toteutuu:

- i) Vastustaja ei itse pelaa tasapainostrategiaa eikä osaa myöskään hyödyntää muiden pelaajien käsivalikoimia silloin, kun he eivät pelaa tasapainostrategioita.
- ii) Pelitilanne jossa tasapainokäsivalikoima muodostetaan, on niin harvinainen, ettei tarkkaavaisellakaan vastustajalla ole riittävästi informaatiota tietääkseen käsivalikoiman sisältöä.

Ensimmäinen kohta on enemmän ilmeinen kuin toinen, ja se toteutuu esimerkiksi tilanteessa, jossa vastustaja maksaa kaikki lyönnit eikä kippaa mitään käsiään. Tällöin tasapainokäsivalikoima ei maksimoi odotusarvoa, vaan odotusarvon maksimoi sellainen käsivalikoima, jonka käsillä lyödään pelkkiä arvolyöntejä. Bluffeja ei ole syytä olla käsivalikoimassa lainkaan, kun vastustaja ei kuitenkaan kippaa. Tilanne on analoginen kivi-paperi-sakset –peliin, jossa 100% ajasta kiven pelaavaa vastustajaa vastaan kannattaa pelata aina paperi, mikäli vastustaja ei ala muuttaa pelistrategiaansa. Tällöinkään ei ole odotusarvon maksimoimisen kannalta järkevää pelata tasapainostrategiaa (1/3 kivi, 1/3 paperi, 1/3 sakset).

Toinen kohta on vähemmän ilmeinen, mutta siinä kuvattuja pelitilanteita tapahtuu hyvin monia vastustajia vastaan. Myöhäisille streeteille kuten turnille ja riverille asti pelatut kädet voivat haarautua monenlaisiksi tilanteiksi, jotka täysin samanlaisina tulevat todella harvoin enää uudestaan vastaan. Esimerkki 4.1. valaisee asiaa; siinä käydään läpi tilanne, jossa lyöntivalikoima ei noudata tasapainostrategiaa, mutta se tuskin aiheuttaa ongelmia hyvääkään pelaajaa vastaan.

Esimerkki 4.1.

Pelataan Texas Hold'em live-pöytää, oma käsi on 3♥3♣ ja oma positio on BB. Live-pöytä tarkoittaa kasinolla kasvatusten pelattavaa peliä. Tuntematon, toistaiseksi vähän käsiä pelannut ja tiukan oloinen vastustaja avaa 3bb:een HJ:sta, ja efektiiviset stackit ovat 100bb. Lyönti maksetaan ja floppiin tulee K♥8♣3♦. Sökötetään, ja vastustaja lyö puolen potin suuruisen jatkolyönnin. Lyönti maksetaan ja turniin tulee 2♠.

Tällaisessa tilanteessa voidaan turnilla harkita lyöntiä, joka ei noudata tasapainostrategiaa. Usein tiukan vastustajan käsivalikoima on tällaisessa tilanteessa suunnilleen {AA, KK, AK, KQ, KJ, 88}. Tiukka ja maltillinen vastustaja saattaa sököttää perässä huonommat kätensä turnilla, mutta maksaa lyönnin ja lisäksi maksaa vielä toisen lyönnin riverillä. Jos lyönti päätetään tehdä, se ei hyvin todennäköisesti noudata tasapainostrategiaa, koska on vaikeaa sisällyttää mitään järkeviä bluffikäsiä käsivalikoimaan tällaisessa tilanteessa. Flopissa kaikki kortit ovat eri maata (eli se on rainbow), ja suoran mahdollisuuksiakaan ei ole. Tästä syystä flopin maksu on tehty lähes aina käsillä, joilla on varteenotettavat voittomahdollisuudet showdownissa. Tällaisilla käsillä puolestaan kannattaa sököttää ja maksaa ja pyrkiä showdowniin, mikäli ne eivät sisälly arvolyöntivalikoimaan.

Se että käsivalikoima ei noudata tasapainostrategiaa tuskin kuitenkaan haittaa, koska tilanne jossa sökötetään ja maksetaan kolmosilla ensimmäisestä positiosta rainbow-floppiin, jonka jälkeen tuleva turnin kortti ei ole samaa maata minkään flopin kortin kanssa, on harvinainen. Live-pokeriolosuhteissa käsiä tulee noin 20 kappaletta tunnissa, ja tällaisen nimenomaisen tilanteen toistumiseen voi kulua useita kuukausia, vaikka pelattaisiin samaa vastustajaa vastaan joka päivä.

Voi olla, että huonommilta käsiltä ei saada toisinaan maksuja enempää kuin yhden lyönnin verran tälläkään strategialla, mutta on joka tapauksessa epätodennäköistä, että tuntematon vastustaja voisi millään tavalla eksplotiivisesti hyödyntää tätä käsivalikoimaa, joka ei noudata tasapainostrategiaa.

4.2. Käytetyn mallin puutteet ja mahdollinen jatkokehittely

Tässä työssä käytetyt menetelmät tekevät joitakin yksinkertaistuksia ja oletuksia, jotka eivät aina päde oikeassa pelitilanteessa, ja joiden takia menetelmiä olisi jatkossa mahdollista kehittää huomattavasti tarkemmiksi. Tässä osiossa tarkastellaan joitakin yllä kehitetyn mallin puutteita, ja kohdassa 4.2.1. tarkastellaan Gilpinin, Sandholmin ja Sørensenin kehittelemää menetelmää [19], joka etsii Nashin tasapainoa yleisemminkin kuin vain all-in –tilanteissa.

Kuten todettua, pre-flop –all-in –tilanteissa oletettiin että pelaajat eivät koskaan slouvaa eli pelaa vahvoja käsiä hämäyksen vuoksi passiivisesti. Vahvoja käsiä ei siis otettu koskaan maksuvalikoimaan kuten oikeissa pelitilanteissa silloin tällöin tehdään, vaan nämä kädet otettiin aina panostusvalikoimaan. Tämä vaikuttaa kolmannessa luvussa läpi käytyjen 5-bet- ja 3-bet-all-in –tilanteiden tuloksiin siten, että panostajalla oletettiin olevan aina käsivalikoimansa parhaat 5% kädessään mikäli hän panostaa valikoimalla, jonka suuruus kombinaatiot laskettaessa vastaisi kyseisen suuruista käsivalikoimaa. Kuitenkin todellisissa pelitilanteissa maksetaan silloin tällöin esimerkiksi NL Holdemin parhaalla kädellä AA:lla, eikä se tällöin ole 100% ajasta panostusvalikoimassa.

Preflop-all-in –tilanteissa mallia voitaisiin kehittää jatkossa siten, että määritettäisiin jonkunlainen todennäköisyys kunkin vahvan käden slouvaamiselle, ja tämän perusteella annettaisiin jokin lukua 1 pienempi painokerroin jolla kyseisen käden muodostavat

käsi-kombinaatiot lisättäisiin käsivalikoimiin. Jos esimerkiksi mainittu käsi AA slouvataan todennäköisyydellä $p_s = 1/3$, otettaisiin kaikista kuudesta AA:n muodostavasta käsi-kombinaatioista panostusvalikoimaan neljä kombinaatiota, ja kaksi kombinaatiota ainoastaan maksettaisiin. Malliin tulisi lisää parametreja ja se muuttuisi hieman monimutkaisemmaksi. Lisäksi muitakin käsiä kuin AA voitaisiin mahdollisesti slouvat.

Osiossa 2.5.5 kerrottiin menetelmästä, jolla parhaat kädet tässä työssä määritetään. Paremmuusjärjestys määritetään sen perusteella, kuinka hyvin käsi pärjää kolmea satunnaisesti valittua kättä vastaan. Tämä on useimmiten pre-flop-tilanteissa kohtuullisen lähellä optimaalista all-in-panostusvalikoimaa, mutta ei kuitenkaan yleensä ole tarkka optimi, koska tarkka optimi on aina hyvin tilannekohtainen. Mikäli käsivalikoimia alettaisiin laajentaa muutenkin kuin vain parhaista käsistä huonompiin, täytyisi käydä läpi myös tilanteita, joissa valikoima olisi esimerkiksi {8%, 10-11%} eli siihen ei sisältyisi väliprosentit 8-10%. Tällöin haasteeksi muodostuisi se, että käsivalikoiden vaihtoehtojen määrä kasvaisi huomattavan paljon ja samoin läpikäytävien simulaatioiden määrä.

Lisäksi kaikkiin laskennallisia tuloksia tuottaviin menetelmiin tehtiin yksinkertaistus, joka oli se että tarkasteluun valittiin ainoastaan tilanteita, joissa panostettiin all-in tai kipattiin, koska stackin suhde pottiin (SPR) oli alhainen. Ainoastaan osiossa 2.5.7, jossa tarkasteltiin lyhyesti takaperininduktiota, tarkasteltiin muitakin panoskokoja. Kun pelaajan strategiavaihtoehtoiksi otetaan vain all-in-panostus ja kippi, helpottuu Nashin tasapainojen laskeminen huomattavasti, koska all-in –panostuksen jälkeen vastustajalle jää vaihtoehtoiksi joko kipata tai maksaa, ja tämän jälkeen jako päättyy päätösten tekemisen osalta. Mikäli tarkasteltaisiin tilanteita, joissa panostus ei ole all-in, tulee vastustajalle kipin ja maksun lisäksi vaihtoehtoksi myös korotus, ja tämä puolestaan tuo tapahtumapuuhun valtavan määrän uusia haaroja, koska korotus voidaan tehdä usealla eri panostuskoolla. Lisäksi korotuksenkaan jälkeen jako ei pääty, vaan toimintavuoro palaa alkuperäiselle panostajalle, joka jälleen voi päättää kippaako, maksaako vai korottaako itse vielä lisää ja millä panoskoolla, mikäli ei panosta all-in.

4.2.1. Gilpinin, Sandholmin ja Sørensenin menetelmä panoskokojen rajoittamiseen

Yksi tapa jolla tämän työn menetelmää voidaan laajentaa, on ottaa tarkasteluun tilanteita, joissa pelaajan on mahdollista tehdä muutakin kuin panostaa all-in tai kipata. Ongelmaksi muodostuu tällöin helposti se, että mahdollisten toimintojen määrä kasvaa hyvin suureksi. Jos pelataan kasinolla fyysisillä pelimerkeillä, on panostusten usein oltava käytännön syistä jaollisia pienellä blindilla, koska pienempiä pelimerkkejä ei ole. Tällöinkin SB:llä on jo ensimmäisellä vuorollaan 500bb:n stackilla kaksinpelitalanteessa 999 mahdollista tapaa toimia: hän voi kipata, maksaa tai korottaa minkä tahansa määrän väliltä 4-1000 pientä blindia, ja koko pelin päätöspuun solmukohtien määrä on suuruusluokkaa 10^{17} . Mikäli pelataan internetissä, useimmilla sivustoilla panoskokoa voi säädellä yhden sentin tarkkuudella, jolloin valittavissa olevien toimintojen määrä nousee satoihin tuhansiin jo ensimmäistä panostusta tehtäessä. Näistä syistä Nashin tasapainoa laskettaessa mahdollisten toimintojen määrää eli strategia-avaruutta on käytännössä pakko rajoittaa jollakin tavalla, vaikka rajoitukset eivät olisikaan niin tiukat kuin

tässä työssä tarkastelluissa tilanteissa, joissa oli mahdollista ainoastaan joko panostaa all-in tai kipata.

Gilpin, Sandholm ja Sørensen (2008) esittelevät yhden tällaisen toimintojen määrää rajoittavan menetelmän artikkelissaan ‘A heads-up no-limit Texas Hold’em poker player: Discretized betting models and automatically generated equilibrium-finding programs’ [19]. Artikkelin kirjoittajiin kuuluva Tuomas Sandholm on sittemmin voittanut tiiminsä kanssa tietokonepokerin maailmanmestaruuden vuonna 2014. Kirjoituksessa esitellään tietokoneohjelma, joka tarkastelee strategia-avaruuksia tietyin diskreetein välein ja laskee Nashin tasapainolle arvioita tällaisten strategia-avaruuksia pienentävien rajoitusten sisällä. Artikkelin menetelmässä panostuksille asetetaan seuraavat rajoitukset:

- 1) Pelaaja voi aina panostaa all-in.
- 2) Mikäli kukaan ei ole panostanut panostuskierroksen aikana, pelaaja voi panostaa puolen potin suuruisen panostuksen, potin suuruisen panostuksen tai panostaa all-in. (Lisäksi tähän kohtaan on lisätty vaihtoehdoksi 2/3-potin suuruisen panostus myöhemmin vuonna 2012 [20].)
- 3) Mikäli panostuskierroksen aikana on tullut panostus joltakin muulta pelaajalta, mahdolliset toimenpiteet omalla vuorolla ovat kippaaminen, maksaminen, potin suuruisen korotus tai all-in.
- 4) Panostuksia jotka ovat kooltaan yli puolet panostajan tai maksajan stackista, ei huomioida.
- 5) Korotuksia voidaan tehdä maksimissaan 3 kappaletta kullakin panostuskierroksella.

Mikäli tarkastellaan kasinoilla ihmisten kasvokkain pelattavaa live-pokeria, on rajoitusten 1-5 mukaan pelattava peli varmaankin joiltakin osin melko lähellä todellista ihmisten kesken pelattavaa peliä, ja täten tällaisen pelin Nashin tasapainon ratkaisutkin voivat olla mielenkiintoisia. Kohdan 2 rajoitus toimii siksi, että ihmiset käytännössä panostavat tiettyjä murto-osia potista kuten puoli pottia tai 2/3 pottia, ja on hyvin harvinaista että joku pelaaja panostaisi satunnaiselta kuulostavan määrän kuten esimerkiksi 0.865 pottia. Online-pokerissa tämä pätee myös, koska useimmilla sivustoilla on nykyään käytössä pikanäppäimet panostuksille, ja kyseiset näppäimet ovat usein juuri potin kolmasosan tai neljäsosan monikertoja. Useimmat ihmiset käyttävät näitä pikanäppäimiä eivätkä näppäile panoskokoansa manuaalisesti näppäimistöllään. Kohdan 4 rajoitus johtuu siitä, että useimmissa tilanteissa siinä mainitut panostukset ovat käytännössä sama asia kuin all-in –panostukset, koska ne sitovat panostajan tai maksajan pottiin niin vahvasti, että loputkin pelimerkit ovat lähes aina menossa pottiin seuraavalla panostuskierroksella: kun yli puolet pelimerkeistä on potissa, kannattaa harvoin enää kipata lisäkorotuksiin. Kohdan 5 rajoitus on myös sellainen, joka ei kovin paljoa muuta sitä, miten peli käytännössä etenee: pre-floppia lukuunottamatta useimmissa NL Hold’emin kaksinpelitilanteissa viimeistään kolmanteen korotukseen tullessa jompi kumpi

pelaajista on pelkästään maksanut panostuksen tai on panostanut all-in, jolloin neljättä korotusta ei enää tule.

Yksi verrattain yleinen panostuskoko jota käytännössä näkee, on $\frac{3}{4}$ pottia, mutta tätä ei tässä esiteltävä malli huomioi. Toisen konkreettisen eron siihen, miten peliä käytännössä pelataan, tekee kohdan 3. rajoitus minimikorotukselle tilanteessa, jossa joku muu pelaaja on aiemmin korottanut panostuskierroksella. Tällaisissa tilanteissa usein riittää korottaa vähemmän kuin potin verran, ja käytännössä NL Hold'emissa korotukset ovatkin tällöin pienempiä.

Panostuksiin liittyvien rajoitusten lisäksi lähteessä [19] esitelty tietokoneohjelma tekee myös rajoituksia käsiteltävien pelitilanteiden määrään siten, että strategisesti samankaltaisia tilanteita käsitellään samana tilanteena. Esimerkiksi $A\clubsuit A\spadesuit$:n pelaaminen pre-flopissa ei eroa siitä, miten $A\heartsuit A\spadesuit$ pelataan pre-flopissa. Panoskokoon ja pelitilanteiden määrään tehtyjen rajoitusten jälkeen Nashin tasapainon laskenta muotoillaan *satulapisteongelmaksi* (saddle point problem), kuten kahden pelaajan nollasummapelissä voidaan tehdä:

$$\max_{x \in Q_1} \min_{y \in Q_2} x^T A y = \min_{y \in Q_2} \max_{x \in Q_1} x^T A y. \quad (29)$$

Muotoilussa (29) x tarkoittaa pelaajan 1 strategiaa ja y pelaajan 2 strategiaa. Q_1 ja Q_2 ovat pelaajien strategiajoukot. Termi $x^T A y$ on pelaajan 1 tuottofunktio ja sama termi negatiivisena on pelaajan 2 tuottofunktio.

Lähde [19] esittelee myös toisen muotoilun, jossa etsitään approksimaatiota Nashin tasapainosta, ja se on ϵ -tasapainon (epsilon equilibrium) ratkaiseminen. Kyseistä muotoilua käytetään usein silloin, kun tarkastellaan erittäin suuria päätöspuita, joita pokerissa usein ilmenee, ja joihin lineaarisen ohjelmoinnin menetelmät eivät toimi. Tällöin etsitään strategioita x^* ja y^* , jotka toteuttavat lausekkeen

$$\max_{x \in Q_1} x^T A y^* - \min_{y \in Q_2} (x^*)^T A y \leq \epsilon, \quad (30)$$

valitulla ϵ :n arvolla.

5. Yhteenveto

Tässä työssä käytiin läpi pokerin peruskäsitteistöä, matematiikkaa ja strategiaa viime vuosikymmeniltä, ja tarkasteltiin niitä peliteoreettisessa viitekehyksessä. Näiden pohjalta muodostettiin menetelmiä Nashin tasapainon määrittämiseksi ja tuotettiin Nashin tasapainopisteistä laskennallisia tuloksia joissakin yksinkertaisissa tilanteissa.

Peruskäsitteistöstä käytiin läpi kombinaatioiden laskeminen, käsivalikoimien muodostuminen sekä se, miten arvolyönnit eroavat bluffeista. Kombinaatioiden laskemisessa kiinnitettiin huomiota siihen, miten eri tyylisten aloituskäsien kuten pariutuneiden ja pariutumattomien käsien kombinaatioiden lukumäärää voidaan tarkastella. Lisäksi huomioitiin, että Texas Hold'em:n pelaajat laskevat usein käytännön pelitilanteissa tarkkoja kombinaatiomääriä ja Potti-Omanan pelaajat sen sijaan suhteellisia kombinaatiomääriä. Arvolyönnit määriteltiin

lyönneiksi, joihin rationaalinen ja riskineutraali odotusarvoa maksimoiva pelaaja toivoo maksua, ja bluffit lyönneiksi, joihin kyseinen pelaaja toivoo kippiä. Käsivalikoima määriteltiin käsijoukoksi, johon sisältyvä käsi pelaajalla on valituissa tilanteissa kädessään. Näitä käsitteitä apuna käyttäen muodostettiin tapoja, joilla voidaan laskea arvioita Nashin tasapainolle, ja laskettiin myös joitakin tuloksia.

Nashin tasapainon osalta käytiin läpi tyypilliset peruslähtökohdat kuten matriisipelin ratkaiseminen ja sekastrategioiden muodostaminen, ja tämän jälkeen käsite tuotiin pokerikontekstiin. Tämän jälkeen pohdittiin tasapainostrategioiden hyötyjä pokerissa ja muitakin tasapainopisteiden ominaispiirteitä pokerissa. Nashin tasapainoa koskevien laskennallisten tulosten osalta oletettiin, että valituissa tilanteissa pelaajien oli mahdollista joko panostaa all-in tai kipata, mutta ei panostaa mitään muuta määrää. Oletus tehtiin, koska pelimerkkipinojen suhde pottiin valituissa tilanteissa oli pieni. Lisäksi oletettiin, että käsivalikoimat joilla panostus tehtiin, muodostettiin parhaista mahdollisista käsistä; jos esimerkiksi panostusvalikoima oli 50% kaikista aloituskäsistä, noudatettiin strategiaa, jossa parhaat 50% aloituskäsistä panostetaan ja huonoimmat 50% aloituskäsistä kipataan.

Itse laskennallisista tuloksista voitiin tehdä joitakin johtopäätöksiä. Viimeisenä tehdyn Nashin tasapainoa noudattavan all-in –panostuksen käsivalikoiman suuruutta tarkasteltiin suhteessa toiseksi viimeisen panostuksen käsivalikoiman suuruuteen. Suhteellinen suuruus pienenee, kun stackin suhde pottiin (SPR) kasvaa, ja se myös pienenee silloin, kun toiseksi viimeisen korotuksen käsivalikoimaa laajennetaan. Toimiva nyrkkisääntö on, että lähellä tasapainoa ollaan, kun all-in-panostus tehdään 0.7-kertaisella määrällä käsiä suhteessa niiden käsien lukumäärään, joilla tehdään toiseksi viimeinen panostus, kun SPR on 3.5. SPR:ä pienentämällä kerroin kasvaa ja SPR:ä suurentamalla kerroin pienenee. Lisäksi toiseksi viimeisen panostuksen käsivalikoimaa suurentamalla kerroin pienenee ja pienentämällä kerroin suurenee. Nashin tasapainoa noudattavan all-in –panostusvalikoiman suuruus on yleisimmissä all-in –tilanteissa välillä 0.55-0.85 kertaa sen käsivalikoiman suuruus, jolla toiseksi viimeinen panostus on tehty.

Turnin ja riverin tasapainopisteitä tarkasteltiin analyttisesti, ja Nashin tasapaino laskettiin indifferenssiehdon avulla valituissa tilanteissa. Näissä tapauksissa etsittiin strategia, jonka pelaamisen jälkeen vastustajalle on samantekevää minkä strategian hän valitsee. Valituissa turnin ja riverin tilanteissa tultiin siihen johtopäätökseen, että tasapainostrategioissa bluffin todennäköisyys heikolla kädellä on suurempi, kun panoskoko on suurempi, ja turnilla bluffataan todennäköisemmin kuin riverillä.

Luvun 2 lopussa tarkasteltiin vielä Potti-Omahaa, josta tehtiin vastaavanlaisia odotusarvosimulaatioita kuin Texas Hold'emista. Potti-Omahassa maksimipanostus on potin suuruinen, joten all-in –panostuksiin tehtyä tasapainon arviointimenetelmää ei voitu käyttää. Lisäksi Nashin tasapainon laskeminen on selkeästi haasteellisempaa Potti-Omahassa kuin Texas Hold'emissa valtavan suuren käsikombinaatiomäärän takia, joten laskennallinen tarkastelu rajoittui pienempään määrään tilanteita. Tarkastelun kohteeksi otettiin, kuinka suuri osa pelimerkeistä on panostettava pottiin ennen floppia, jotta ässillä voidaan voitollisesti panostaa all-in mihin tahansa floppiin, vaikka vastustaja tietää panostajan kädessä olevan ässät.

Tulokseksi saatiin, että ainakaan enempää kuin 35% stackista ei tarvi saada panostettua pre-flopissa, jotta odotusarvo on vastustajan odotusarvoa suurempi kaksipelitilanteessa.

Osion 2.5.5. malli on verrattain yksinkertainen, ja parannusmahdollisuuksia on esitetty luvussa 4. Tarkempia Nashin tasapainoa laskevia malleja on kehitetty maailmalla paljon, ja kehitetään edelleen. Tietokoneohjelmat kehittyvät kaiken aikaa, ja nykypeleistä internetissä on löydetty jo paljonkin voitollisia tekoälyrobotteja, joita ei ohjaa ihminen. Tuomas Sandholm, joka on yksi lähteen [19] kirjoittajista, kutsuukin Cardplayer-lehden haastattelussa tehokasta tietokoneohjelmaa ydinaseeksi pokerille. Tekoälyrobottien kehittymistä on pidetty internet-pokerin tulevaisuudennäkymän kannalta huolestuttavana. Ihmisten kesken pelattavat kasinoiden live-pelit eivät varmaankaan maailmasta katoa koskaan, mutta nähtäväksi jää, kuinka kauan online-pokeri pysyy houkuttelevana kohteena voittamistarkoituksessa pokeria pelaaville harrastelijoille.

Sanastoa

3-betata	uudelleenkorottaa pre-flopissa.
4-betata	korottaa lisää, kun vastustaja on 3-betannut.
5-betata	korottaa lisää, kun vastustaja on 4-betannut.
all-in	Tilanne, jossa kaikki pelimerkit menevät pottiin.
arvolyönti	panostus, johon toivotaan maksua.
BB/bb	Isolla kirjoitettuna tarkoittaa pelaajaa joka asettaa suuren sakkopanoksen preflopissa. Pienellä kirjoitettuna tarkoittaa suuren sakkopanoksen kokoista mittayksikköä, esim. ”potti on 15bb:n suuruinen”.
boardi	pöytään jaetut kortit.
blokkeri	käsi, joka blokkaa vastustajan käsivalikoimaa, eli jossa on samoja kortteja, kuin vastustajan käsivalikoiman käsissä.
bluff catcher	käsi, joka voittaa showdownissa vain vastustajan käsivalikoiman bluffit, mutta ei muita käsivalikoiman käsiä.

bluffi	panostus, johon toivotaan kippiä.
button	pelaaja joka istuu buttonilla, eli toimii viimeisenä pre-flopin jälkeen ja ennen sokkopanoksia pre-flopissa. termi voi tarkoittaa pelaajan lisäksi myös kyseistä positiota.
CO (Cut-off)	pelaaja joka istuu preflopissa yhden position päässä buttonista. termiä käytetään pelaajan lisäksi myös kyseisestä positiosta.
efektiivinen stack	Pienin pelissä mukana oleva pelimerkkipino. Esimerkiksi kun kaksinpelitalanteessa toisella on 200 pelimerkkiä ja toisella 100, on efektiivinen stack 100.
eksploitatiivinen pelaaminen (exploit)	lisätä omaa odotusarvoa poikkeamalla tasapainostrategiasta valitussa tilanteessa.
equity	Odotusarvoinen voitto-osuus prosentteina, kun tehdään all-in –panostus, joka maksetaan.
floppi	toinen panostuskierros.
HJ (Hi-Jack)	pelaaja joka istuu pre-flopissa kahden position päässä buttonista.
jatkolyönti	panostus floppiin pelaajalta, joka on korottanut viimeisenä pre-flopissa.
kipata (fold)	Kippaaminen tarkoittaa korttien pois heittämistä. Kun pelaaja kippaa, jako päättyy hänen osaltaan eikä pelaaja aseta enää pelimerkkejä pottiin.
korottaa (raise)	Kun pelaaja korottaa, hän asettaa pottiin maksuun vaadittavan määrän pelimerkkejä ja lisäksi valitsemansa määrän, jolla haluaa korottaa.
käsivalikoima (hand range)	mahdollisten käsien joukko jossakin tietyssä tilanteessa.
maksaa (call)	Maksaminen tarkoittaa, että pelaaja asettaa pottiin saman verran pelimerkkejä kuin edellinen korottaja. Pre-flopissa maksaminen

	tarkoittaa 1bb:n asettamista pottiin, mikäli kukaan ei ole korottanut.
nutsit (nuts)	paras mahdollinen käsi.
OOP (out of position)	Kun pelaaja on vastustajaansa nähden OOP, hän toimii ennen vastustajaansa kyseisellä panostuskierroksella.
panostus	yhteenlaskettu pelimerkkimäärä, jonka pelaaja asettaa pottiin korottaessaan, eli maksuun vaadittavan määrän ja valitun korotuksen summa.
polarisoitu käsivalikoima	Käsivalikoima, joka sisältää vain hyvin vahvoja käsiä ja heikkoja käsiä, eikä lainkaan keskivahvoja käsiä.
positio	Tarkoittaa toimintajärjestystä kullakin panostuskierroksella. Parhaassa positiossa oleva pelaaja toimii viimeisenä.
pre-flop (pf)	ensimmäinen panostuskierros.
rainbow (lyhennetään r)	Tarkoittaa boardia, jossa kaikki kortit ovat eri maata.
river	neljäs panostuskierros.
rundown-käsi	PLO-käsi, jossa on neljä eriarvoista korttia.
SB/sb	Isolla kirjoitettuna tarkoittaa pelaajaa, joka asettaa pienen sokkopanoksen pre-flopissa. Pienellä kirjoitettuna tarkoittaa pienen sokkopanoksen kokoista mittayksikköä.
showdown	Käsien avaaminen ja vertaaminen kun panostuskierrokset etenevät loppuun asti, jolloin potin voittaja ratkaistaan käden paremmuuden perusteella.
slouvata (slowplay)	pelata hitaasti vahva käsi, eli maksaa tai sököttää hämäyksen vuoksi.
splitti	potin puolittaminen, kun molemmilla pelaajilla on sama käsi.
stack	jäljellä olevien pelimerkkien määrä.

streetti	panostuskierros.
sököttää (check)	siirtää vuoro seuraavalle pelaajalle, kun kukaan aiemmin vuorossa ollut ei ole panostanut.
sökötys-korottaa (check-raise)	sököttää ensin omalla vuorolla ja sitten uudelleenkorottaa kun vastustaja korottaa.
tuplapari	PLO-käsi, jossa on kaksi eriarvoista paria.
turn	kolmas panostuskierros.
UTG (under the gun)	Pelaaja, joka toimii ensimmäisenä pre-flopissa. Voi tarkoittaa pelaajan lisäksi myös kyseistä positiota.
uudelleenkorottaa (re-raise)	Korottaa lisää, kun aiemmin vuorossa ollut pelaaja on korottanut.

Merkintätapoja

Tähän osioon on koottu tässä työssä käytettyjä matemaattisia tai pokeriterminologisia merkintätapoja, joita lukija ei välttämättä ymmärrä, jos aihepiiri ei ole tuttu. Ne on selitetty itse tekstissä aina, kun niitä on käytetty ensimmäisen kerran, mutta lukemisen helpottamiseksi ja selkeyttämiseksi ne on myös koottu alla olevaan listaan.

Texas Hold’emin merkintätavat:

- **Aloituskädet:** Texas Hold’emissa aloituskädet merkitään kirjoittamalla molempien korttien arvo peräjälkeen. Jos kädessä on kuningas ja jätkä, merkitään että käsi on KJ.
- **Eri maata ja samaa maata olevat aloituskortit:** Jos molemmat aloituskäden kortit ovat samaa maata, kirjoitetaan käden perään merkintä s. Jos aloituskäden kortit taas ovat eri maata, kirjoitetaan käden perään merkintä o. Mikäli käden perään ei kirjoiteta kumpaakaan kirjainta, tarkoitetaan aloituskättä, jossa ei ole eritelty, ovatko kortit samaa maata vai eri maata.

Esimerkki: Kättä A♥9♣ merkitään notaatiolla A9o, ja kättä A♥9♥ merkitään notaatiolla A9s.

- **Käsivalikoima jossa on pareja:** Texas Hold'emissa käsivalikoimaa, joka pitää sisällään i -arvoisen parin ja kaikki i :tä suuremmat parit, merkitään notaatiolla $\{ii+\}$. Lisäksi käsivalikoimalle, jossa on kaikki taskuparit väliltä i ja j , käytetään merkintää $\{ii-jj\}$.

Esimerkki: Käsivalikoimaa jossa on kädet 77, 88, 99, TT, JJ, QQ, KK ja AA merkitään notaatiolla $\{77+\}$, ja käsivalikoimaa jossa on kädet 33,44 ja 55 merkitään notaatiolla $\{33-55\}$.

- **Käsivalikoima pariutumattomille käsille:** Texas Hold'emissa käsivalikoimaa, joka pitää sisällään paritutumattomia käsiä, joissa suurempi kortti on i ja pienempi kortti on yhtäsuuri tai suurempi kuin j , merkitään notaatiolla $\{ij+\}$. Lisäksi jos käsijoukon kädet ovat samaa maata, merkitään käsijoukon perään s ja eri maata olevien korttien tapauksessa merkitään o, kuten yksittäisten aloituskäsiensäkin merkintätavassa.

Esimerkki: Käsivalikoimaa jossa on kädet 84s, 85s, 86s, ja 87s merkitään notaatiolla $\{84s+\}$.

- **Painokerroin käsivalikoimille ja niiden osajoukoille:** Kun käsivalikoiman tai sen osajoukon edessä on murtoluku suluissa, sisältyy kyseisen käsijoukon käsistä suluissa olevalla murtoluvulla kerrottu osuus kombinaatiomääriä käsivalikoimaan. Jos esimerkiksi käsivalikoima on $\{AA, (1/2)KK\}$, sisältyy käsivalikoimaan kaikki mahdolliset kombinaatiot ässäpareja ja 1/2 mahdollisista kuningasparikombinaatioista.
- **Floppi:** Flopin kortit merkitään siten, että kirjoitetaan boardissa olevien korttien arvot peräjälkeen lihavoituna ja katkoviivoilla toisistaan erotettuna. Lisäksi jos kaikki flopin kortit ovat eri maata, kirjoitetaan flopin perään kirjain r.

Esimerkki: Jos floppiin jaetaan $K♥, 8♣$ ja $3♦$, merkitään että floppi on **K-8-3r**.

Potti-Oman merkintätavat:

- **Aloituskädet:** Potti-Omahassa aloituskädet merkitään kirjoittamalla kunkin neljän kortin arvo peräjälkeen. Jos kädessä on kuningas, jätkä, kymppi ja kahdeksikko, merkitään että käsi on KJT8. Mikäli joitain kortteja ei ole erikseen määritelty, kirjoitetaan kyseisten korttien tilalle merkintä x. Tämä tarkoittaa, että x:n kohdalla voi olla mikä tahansa mahdollinen kortti.

Esimerkki: AAxx tarkoittaa ässäparia, jonka kanssa voi olla kolmantena ja neljäntenä korttina mitkä tahansa kortit.

- **Käsivalikoimat:** Potti-Oman käsivalikoimat kirjoitetaan aaltosulkeiden sisään kuten Texas Hold'emissäkin. Merkintä x käsivalikoimassa tarkoittaa kaikkia mahdollisia arvoja, joita kyseisellä tavalla merkitty kortti voi saada. Esimerkiksi {AAxx} tarkoittaa kaikkia mahdollisia ässäparikombinaatioita.

Lisäksi tässä työssä käytetään merkintää * Potti-Oman käsivalikoimalle, josta on poistettu kädet {Axxx} ja kädet, jotka pitävät sisällään kahden tai useamman samanarvoisen kortin.

- **Floppi:** Flopin kortit merkitään samalla tavoin kuin Texas Hold'emissa.

Lähteet

- [1] Brunson, D. Doyle Brunson's Super System: A Course in Power Poker. 3rd ed. Cardoza Publishing, 1979. 605s. ISBN 978-1-58042-081-5.
- [2] Sklansky, D. Theory of Poker. Two plus two publishing, 1987. 295s. ISBN 1-880685-00-0.
- [3] Luttinen, M. 2010. No-Limit Texas Hold'em - Käteispelistrategian analyysi. Diplomityö. Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos. Espoo. 100 s.
- [4] Sandholm, T. 2010. The State of Solving Large Incomplete-Information Games, and Application to Poker. AI Magazine, special issue on Algorithmic Game Theory, Winter, 13–32.
- [5] Brown, N., Ganzfried, S., and Sandholm, T. 2015. Hierarchical Abstraction, Distributed Equilibrium Computation, and Post-Processing, with Application to a Champion No-Limit Texas Hold'em Agent. Computer Poker and Imperfect Information Workshop at the AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), Austin, TX.
- [6] Pyysing, A. & Erola, M. *Pokerin käsikirja*. Helsinki: Like, 2005 (4. painos 2007). 365s. ISBN 978-952-01-0034-6.
- [7] Pokerisivusto "Beating microstakes zoom poker for a second income".
<http://crushzoompoker.blogspot.fi/>

- [8] PokerListings-sivuston kirjoitus "Texas Hold'em Rules and Game Play".
<http://www.pokerlistings.com/poker-rules-texas-holdem>
- [9] Pokeri.info-sivuston kirjoitus "Texas Hold'emin säännöt". <http://www.pokeri.info/texas-holdem.htm>
- [10] South, C. Nguyen, T. Let There Be Range!: Crushing SSNL/MSNL No-Limit Holdem Games. Daily Variance Publishing, 2008. 80s. ISBN 978-0982402252.
- [11] Nash, J. 'The Bargaining Problem', *Econometrica*, 18, 1950, 155-62.
- [12] Nash, J. 'A Simple Three-Person Poker Game', with Shapley, L.S. *Annals of Mathematic Studies*, 24, uusintapainos lähteestä Kuhn, H.W, Tucker, A.W. (eds), *Contributions to the Theory of Games, Volume I*, 1950, Princeton University Press, 105-6.
- [13] Nash, J. 'Equilibrium Points in N-Person Games', *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 1950, 48-9.
- [14] Gibbons, R. A Primer in Game Theory. Pearson Education Limited, 1992. ISBN 0-7450-1159-4
- [15] Aumann, R. What is game theory trying to accomplish? Sisältyy lähteeseen Arrow, K., Honkapohja, S., *Frontiers of Economics*. 1985. Oxford: Basil Blackwell, s. 28-76
- [16] Berman, L. Pot-Limit Omaha. Sisältyy lähteeseen Brunson, D. *Pokeri – Supersysteemi*, s.385-429 (alkuperäinen nimi: Doyle Brunson's Super System 2: A Course in Power Poker). Readme.fi, 2008. ISBN 978-952-5655-75-9
- [17] Slotboom, R. Secrets of Professional Pot-Limit Omaha. D&B –Publishing, 2006. 240s. ISBN 978-1-904468-30-1.
- [18] Hwang, J. Advanced Pot-Limit Omaha, Volume I: Small Ball and Short-Handed Play. Dimat Enterprises, Inc, 2009. 544s. ISBN 978-0-974150291.
- [19] Gilpin, A., Sandholm, T., and Sørensen, T. 2008. A heads-up no-limit Texas Hold'em poker player: Discretized betting models and automatically generated equilibrium-finding programs. In Proceedings of the *International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*.
- [20] Ganzfried, S. and Sandholm, T. 2012. Tartanian5: A Heads-Up No-Limit Texas Hold'em Poker-Playing Program. *Computer Poker Symposium* at the *AAAI Conference on Artificial Intelligence*.